Министерство науки и высшего образования РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада 2021-2022
МАТЕМАТИКА (11 класс)
Заключительный этап
Вариант 1

1. Вычислите $2022! \cdot (S_{2021} - 1)$, если $S_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}$.

Ответ: -1.

Решение.

Учитывая, что $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$, получим

$S_{2021} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{2021}{2022!} = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2021!} - \frac{1}{2022!}\right) = 1 - \frac{1}{2022!}$.

Тогда $2022! \cdot (S_{2021} - 1) = 2022! \cdot \left(1 - \frac{1}{2022!} - 1\right) = -1.$

2. Для каждого значения параметра k решите уравнение

$$4 - \sin^2 x + \cos 4x + \cos 2x + 2\sin 3x \cdot \sin 7x - \cos^2 7x = \cos^2\left(\frac{\pi k}{2021}\right).$$

Ответ: При $k = 2021 \cdot m,\ m \in Z$ $\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$;

при других значениях параметра k решений нет.

Решение.

Исходное уравнение равносильно следующему уравнению:

$$(\sin 3x + \sin 7x)^2 + (\cos 3x + \cos x)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi k}{2021}\right) = 0.$$

$$\begin{cases} \sin 3x + \sin 7x = 0, \\ \cos 3x + \cos x = 0, \\ \sin\left(\frac{\pi k}{2021}\right) = 0. \end{cases}$$

Если $k = 2021 \cdot m, m \in Z$, то решая первое и второе уравнение системы, получим

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$$

При других значениях параметра k решений нет.

3. Пусть $\mathrm{p(x)} = \mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} + 2$. Вычислите произведение

$$\left(1 - \frac{2}{\mathrm{p}(1)}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{\mathrm{p}(2)}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{\mathrm{p}(3)}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{\mathrm{p}(2021)}\right).$$

Ответ: $\mathbf{\frac{1012}{3033}}$.

Решение.

Рассмотрим n −й множитель в данном произведении

$$1-\frac{2}{\mathrm{p(n)}}=\frac{\mathrm{p(n)}-2}{\mathrm{p(n)}}=\frac{\mathrm{n}^2+3\mathrm{n}}{\mathrm{n}^2+3\mathrm{n}+2}=\frac{\mathrm{n(n+3)}}{\mathrm{(n+1)(n+2)}}.$$

Вычислим

$$\left(1-\frac{2}{\mathrm{p(1)}}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{\mathrm{p(2)}}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{\mathrm{p(3)}}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{\mathrm{p(2021)}}\right)=\frac{1\cdot4}{2\cdot3}\cdot\frac{2\cdot5}{3\cdot4}\cdot\frac{3\cdot6}{4\cdot5}\cdots\frac{2021\cdot2024}{2022\cdot2023}=\frac{1\cdot2024}{3\cdot2022}=\frac{1012}{3033}.$$

4. Найдите значение выражения $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}$, если относительно $a,\ b,\ c$ известно, что это три различных действительных числа, удовлетворяющих условиям $a^3-2022a^2+1011=0,\ \ b^3-2022b^2+1011=0,\ \ c^3-2022c^2+1011=0.$

Ответ: $\mathbf{-2}$.

Решение.

Кубическое уравнение $t^3-2022t^2+1011=0$ имеет три различных корня (так как для $f(t)=t^3-2022t^2+1011:\ f(-3000)<0, f(0)>0, f(10)<0, f(3000)>0)$.

Пусть эти корни и будут a,b,c. Тогда по теореме Виета:

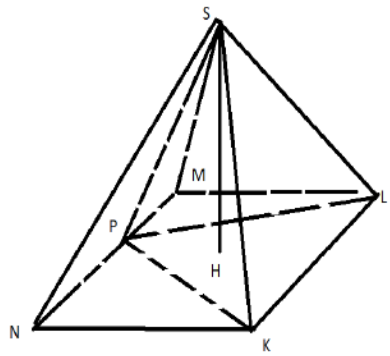
$$\begin{cases} a+b+c=2022, \\ ab+bc+ac=0, \\ abc=-1011. \end{cases}$$

Найдем значение выражения : $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=\frac{c+a+b}{abc}=\frac{2022}{-1011}=-2.$

5. В основании четырехугольной пирамиды $SMNKL$ лежит прямоугольник $MNKL$. Известны длины четырех ребер данной пирамиды $MN=5$, $NK=2$, $SM=3$, $SN=4$. Определите при каких значениях длин оставшихся двух ребер SK и SL объем пирамиды достигает наибольшей величины, и вычислите этот объем.

Ответ: $V_{max}=8$, $SK=2\sqrt{5}\,, SL=\sqrt{13}.$

Решение.



Опустим из точки *S* перпендикуляры *SP* на ребро *MN* и *SH* на плоскость основания $MNKL$.

Все стороны треугольника *SMN* известны, поэтому длина *SP* определяется однозначно, основание пирамиды фиксировано, поэтому объем достигает наибольшего значения, если максимальна высота *SH* пирамиды.

Значит, *SP* и *SH* должны совпадать, и следовательно, грани *SMN* и $MNKL$ перпендикулярны.

Треугольник *SMN* прямоугольный, так как $SM=3$, $SN=4, MN=5$.

После элементарных вычислений получаем $SP=\frac{12}{5}, MP=\frac{9}{5}, NP=\frac{16}{5}$.

Из прямоугольных треугольников *NKP* и *SKP*, *MLP* и *SLP* находим

$$SK^2 = SP^2 + NP^2 + NK^2 = 20,\ \ SL^2 = SP^2 + MP^2 + ML^2 = 13 \Rightarrow\ SK = 2\sqrt{5}, SL = \sqrt{13}$$

$$V_{max} = \frac{1}{3} \cdot S_{MNKL} \cdot SP = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot \frac{12}{5} = 8.$$

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Министерство науки и высшего образования РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада 2021-2022
МАТЕМАТИКА (11 класс)
Заключительный этап
Вариант 2

1. Вычислите $2023!\cdot(S_{2022}-1)$, если $S_n=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}$.

Ответ: -1.

Решение.

Учитывая, что $\frac{n}{(n+1)!}=\frac{n+1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$, получим

$S_{2022}=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{2022}{2023!}=\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2022!}-\frac{1}{2023!}\right)=1-\frac{1}{2023!}$.

Тогда $2023!\cdot(S_{2022}-1)=2023!\cdot\left(1-\frac{1}{2023!}-1\right)=-1.$

2. Для каждого значения параметра k решите уравнение

$$2+\cos^2 x+\cos 4x+\cos 2x+2\sin 3x\cdot\ \sin 7x+\sin^2 7x=\cos^2\left(\frac{\pi k}{2022}\right).$$

Ответ: При $k=2022\cdot m,\ m\in Z\quad x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ \ n\in Z;$

при других значениях параметра k решений нет.

Решение.

Исходное уравнение равносильно следующему уравнению:

$$(\sin 3x+\sin 7x)^2+(\cos 3x+\cos x)^2+\sin^2\left(\frac{\pi k}{2022}\right)=0.$$

$$\begin{cases}\sin 3x+\sin 7x=0,\\ \cos 3x+\cos x=0,\\ \sin\left(\frac{\pi k}{2022}\right)=0.\end{cases}$$

Если $k=2022\cdot m, m\in Z$, то решая первое и второе уравнение системы, получим

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ \ n\in Z.$$

При других значениях параметра k решений нет.

3. Пусть $p(x)=x^2+3x+2$. Вычислите произведение

$$\left(1-\frac{2}{p(1)}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{p(2)}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{p(3)}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{p(2022)}\right).$$

Ответ: $\mathbf{\frac{675}{2023}}$.

Решение.

Рассмотрим n −й множитель в данном произведении

$$1-\frac{2}{p(n)}=\frac{p(n)-2}{p(n)}=\frac{n^2+3n}{n^2+3n+2}=\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}.$$

Вычислим

$\left(1-\frac{2}{p(1)}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{p(2)}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{p(3)}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{p(2022)}\right)=\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\cdot\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}\cdots\frac{2022\cdot 2025}{2023\cdot 2024}=\frac{1\cdot 2025}{3\cdot 2023}=\frac{675}{2023}.$

4. Найдите значение выражения $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}$, если относительно $a,\ b,\ c$ известно, что это три различных действительных числа, удовлетворяющих условиям $a^3-2020a^2+1010=0,\ \ b^3-2020b^2+1010=0,\ \ c^3-2020c^2+1010=0.$

Ответ: $\mathbf{-2}$.

Решение.

Кубическое уравнение $t^3-2020t^2+1010=0$ имеет три различных корня (так как для $f(t)=t^3-2020t^2+1010:\ f(-3000)<0, f(0)>0, f(10)<0, f(3000)>0)$.

Пусть эти корни и будут a, b, c. Тогда по теореме Виета:

$$\begin{cases} a+b+c=2020, \\ ab+bc+ac=0, \\ abc=-1010. \end{cases}$$

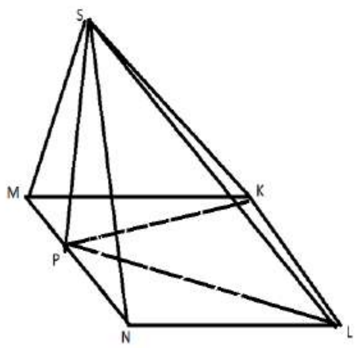
Найдем значение выражения : $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=\frac{c+a+b}{abc}=\frac{2020}{-1010}=-2.$

5. В основании четырехугольной пирамиды $SMNKL$ лежит ромб $MNKL$ со стороной 4 и острым углом NMK в $60°$. Известно, что $SM=2,\ SN=4$. Определите при каких значениях длин оставшихся двух ребер SK и SL объем пирамиды достигает наибольшей величины, и вычислите этот объем.

Ответ: $V_{max}=4\sqrt{5}$, $SK=3\sqrt{2}\,, SL=\sqrt{46}.$

Решение.

Опустим из точки S перпендикуляры SP на ребро MN и SH на плоскость основания $MNKL$.



Все стороны треугольника SMN известны, поэтому длина SP определяется однозначно, основание пирамиды фиксировано, поэтому объем достигает наибольшего значения, если максимальна высота SH пирамиды.

Значит, SP и SH должны совпадать, и следовательно, грани SMN и $MNKL$ перпендикулярны.

Треугольник SMN равнобедренный, так как $SN=4, MN=4$.

После элементарных вычислений получаем $SP=\frac{\sqrt{15}}{2}, MP=\frac{1}{2}, NP=\frac{7}{2}.$

Из треугольника MPK найдем $PK^2=MK^2+MP^2-2MK\cdot MP\cdot\cos 60°\Rightarrow\ \ PK^2=\frac{57}{4}.$

Из прямоугольного треугольника SPK находим $SK^2 = SP^2 + PK^2 \Rightarrow \quad SK^2 = 18 \Rightarrow$ $SK = 3\sqrt{2}$.

Из треугольника PNL найдем $PL^2 = NL^2 + PN^2 - 2NL \cdot PL \cdot \cos 120° \Rightarrow \quad PL^2 = \frac{169}{4}$.

Из прямоугольного треугольника SPL находим $SL^2 = SP^2 + PL^2 \Rightarrow \quad SL^2 = 46 \Rightarrow$ $SK = \sqrt{46}$.

$$V_{max} = \frac{1}{3} \cdot S_{MNKL} \cdot SP = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} = 4\sqrt{5}.$$

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.