Министерство науки и высшего образования РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада 2021-2022
МАТЕМАТИКА (10 класс)
Заключительный этап
Вариант 1

1. Найдите все значения n, при которых сумма

$$1! + 2! + 3! + \cdots + n!, \quad \text{где} \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n,$$

является точным квадратом.

Ответ: $\boldsymbol{n = 1;\ 3}$.

Решение.

$1! = 1 = 1^2$, $\quad 1! + 2! = 3$, $\quad 1! + 2! + 3! = 9 = 3^2$, $\quad 1! + 2! + 3! + 4! = 33$,

$1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 33 + 120 = 153$.

В дальнейшем, последней цифрой всегда будет 3, так как прибавляться к 33 всегда будут числа, оканчивающиеся нулем. Следовательно, точных квадратов больше не будет. Таким образом, условию задачи удовлетворяют всего лишь два значения $n = 1$ и $n = 3$.

2. Про квадратный трехчлен $p(x) = (a+1)x^2 - (a+1)x + 2022$ известно, что $-2022 \le p(x) \le 2022$ при $x \in [0; 1]$. Найдите наибольшее возможное значение a.

Ответ: $\boldsymbol{16175}$.

Решение. Так как $p(0) = p(1) = 2022$, то графиком квадратного трехчлена является парабола, симметричная относительно прямой $x = \frac{1}{2}$. Из условий, что $-2022 \le p(x) \le 2022$ при $x \in [0; 1]$ и $p(0) = p(1) = 2022$ следует, что ветви параболы направлены вверх. Тогда наименьшее значение $p(x)$ равно $p\left(\frac{1}{2}\right) = 2022 - \frac{(a+1)}{4}$. Наибольшее возможное значение a будет достигаться при $p\left(\frac{1}{2}\right) = -2022$. Следовательно,

$$2022 - \frac{(a+1)}{4} = -2022 \Rightarrow \frac{(a+1)}{4} = 4044 \Rightarrow a + 1 = 16176 \Rightarrow a = 16175 .$$

3. Найдите значение выражения $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, если относительно $a,\ b,\ c$ известно, что это три различных действительных числа, удовлетворяющих условиям:

$a^3 - 2022a + 1011 = 0$, $\ b^3 - 2022b + 1011 = 0$, $\ c^3 - 2022c + 1011 = 0$.

Ответ: $\mathbf{2}$.

Решение.

Кубическое уравнение $t^3 - 2022t + 1011 = 0$ имеет три различных корня (так как для $f(t) = t^3 - 2022t + 1011$: $f(-100) < 0, f(0) > 0, f(10) < 0, f(100) > 0)$.

Пусть эти корни и будут a, b, c. Тогда по теореме Виета:

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ ab + bc + ac = -2022, \\ abc = -1011. \end{cases}$$

Найдем значение выражения : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ac}{abc} = \frac{-2022}{-1011} = 2.$

4. Докажите, что неравенство

$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + bz)^2 - (by + cx)^2 - (cz - ay)^2 \geq 0$

выполняется для любых значений переменных $a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z.$

Доказательство.

Раскрывая скобки и приводя подобные, получаем

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + bz)^2 - (by + cx)^2 - (cz - ay)^2 =$$
$$= a^2z^2 + b^2x^2 + c^2y^2 - 2abxz - 2bcxy + 2acyz = (az - bx + cy)^2.$$

Следовательно, получаем неравенство,

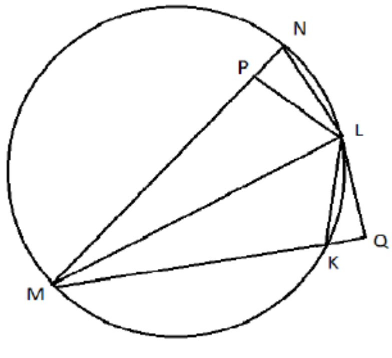
$$(az - bx + cy)^2 \geq 0\,,$$

которое выполняется для любых значений переменных $a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z.$

5. Через вершину M некоторого угла, проведена окружность, пересекающая стороны угла в точках N и K, а биссектрису этого угла – в точке L. Найдите сумму длин отрезков MN и MK, если площадь $MNLK$ равна 25, а угол LMN равен 30°.

Ответ: $\mathbf{10\sqrt[4]{3}}$**.**

Решение.



Пусть LP и LQ – перпендикуляры к MN и MK соответственно.

Точка L лежит на биссектрисе угла и следовательно равноудалена от сторон угла, а значит $LP = LQ$.

Прямоугольные треугольники NPL и LQK равны (по катету и гипотенузе), а также равны прямоугольные треугольники MPL и MQL (аналогично, по катету и гипотенузе).

С одной стороны,

$$MN + MK = MP + PN + MK = MP + KQ + MK = MP + MQ = 2MP.$$

С другой стороны,

$$25 = S_{MNLK} = S_{MPL} + S_{MQL} = 2S_{MPL} = MP \cdot PL = MP^2 \cdot \mathrm{tg}30° = \frac{MP^2}{\sqrt{3}} \Rightarrow MP = 5\sqrt[4]{3}.$$

Таким образом, имеем $MN + MK = 2MP = 10\sqrt[4]{3}.$

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Министерство науки и высшего образования РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада 2021-2022
МАТЕМАТИКА (10 класс)
Заключительный этап
Вариант 2

1. Решите уравнение в целых числах

$$2025^x - 100xy + 3 - y^2 = 0.$$

Ответ: $(\mathbf{0}; \mathbf{2}), (\mathbf{0}; -\mathbf{2})$.

Решение.

Рассматриваем $x, y \in Z$.

$$2025^x - 100xy + 3 = y^2.$$

1) $x = 0 \Rightarrow 2025^0 - 0 + 3 = y^2 \Rightarrow 4 = y^2 \Rightarrow y = \pm 2$.

2) $x < 0 \Rightarrow 2025^x - 100xy + 3 = y^2 \Rightarrow$ нет решений, так как число в левой части − не целое, а в правой − целое.

3) $x > 0 \Rightarrow 2025^x - 100xy + 3 = y^2 \Rightarrow$ нет решений, так как число в левой части оканчивается на цифру 8, а в правой части − точный квадрат.

2. Про квадратный трехчлен $p(x) = (a-1)x^2 - (a-1)x + 2022$ известно, что $-2022 \le p(x) \le 2022$ при $x \in [0; 1]$. Найдите наибольшее возможное значение a.

Ответ: $\mathbf{16177}$.

Решение. Так как $p(0) = p(1) = 2022$, то графиком квадратного трехчлена является парабола, симметричная относительно прямой $x = \frac{1}{2}$. Из условий, что $-2022 \le p(x) \le 2022$ при $x \in [0; 1]$ и $p(0) = p(1) = 2022$ следует, что ветви параболы направлены вверх. Тогда наименьшее значение $p(x)$ равно $p\left(\frac{1}{2}\right) = 2022 - \frac{(a-1)}{4}$. Наибольшее возможное значение a будет достигаться при $p\left(\frac{1}{2}\right) = -2022$. Следовательно,

$$2022 - \frac{(a-1)}{4} = -2022 \Rightarrow \frac{(a-1)}{4} = 4044 \Rightarrow a - 1 = 16176 \Rightarrow a = 16177 \, .$$

3. Найдите значение выражения $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, если относительно a, b, c известно, что это три различных действительных числа, удовлетворяющих условиям: $a^3 - 2020a + 1010 = 0$, $b^3 - 2020b + 1010 = 0$, $c^3 - 2020c + 1010 = 0$.

Ответ: **2**.

Решение.

Кубическое уравнение $t^3 - 2020t + 1010 = 0$ имеет три различных корня (так как для $f(t) = t^3 - 2020t + 1010$: $f(-100) < 0, f(0) > 0, f(10) < 0, f(100) > 0)$.

Пусть эти корни и будут a, b, c. Тогда по теореме Виета:

$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ ab+bc+ac=-2020, \\ abc=-1010. \end{cases}$$

Найдем значение выражения : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ac}{abc}=\frac{-2020}{-1010}=2.$

4. Докажите, что неравенство

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax-bz)^2-(by-cx)^2-(cz-ay)^2 \geq 0$

выполняется для любых значений переменных a, b, c, x, y, z.

Доказательство.

Раскрывая скобки и приводя подобные, получаем

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax-bz)^2-(by-cx)^2-(cz-ay)^2=$$
$$=a^2z^2+b^2x^2+c^2y^2-2abxz+2bcxy-2acyz=(az-bx-cy)^2.$$

Следовательно, получаем неравенство,

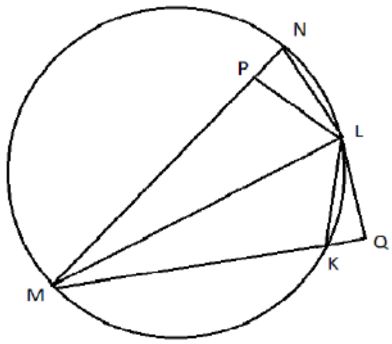
$$(az-bx-cy)^2 \geq 0\,,$$

которое выполняется для любых значений переменных a, b, c, x, y, z.

5. Через вершину M некоторого угла, проведена окружность, пересекающая стороны угла в точках N и K, а биссектрису этого угла − в точке L. Найдите сумму длин отрезков MN и MK, если площадь $MNLK$ равна 49, а угол LMN равен 30°.

Ответ: $\mathbf{14\sqrt[4]{3}}$.

Решение.



Пусть LP и LQ − перпендикуляры к MN и MK соответственно.

Точка L лежит на биссектрисе угла и следовательно равноудалена от сторон угла, а значит $LP=LQ$.

Прямоугольные треугольники NPL и LQK равны (по катету и гипотенузе), а также равны прямоугольные треугольники MPL и MQL (аналогично, по катету и гипотенузе).

С одной стороны,

$$MN+MK=MP+PN+MK=MP+KQ+MK=MP+MQ=2MP.$$

С другой стороны,

$$49=S_{MNLK}=S_{MPL}+S_{MQL}=2S_{MPL}=MP\cdot PL=MP^2\cdot \mathrm{tg}30°=\frac{MP^2}{\sqrt{3}} \Rightarrow MP=7\sqrt[4]{3}.$$

Таким образом, имеем $MN+MK=2MP=14\sqrt[4]{3}$.

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.