

ПЛЕХАНОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2021/22 ПО МАТЕМАТИКЕ

3 вариант (8-9 класс)

Задание 1 (10 баллов)

Пусть дан многочлен степени $2n$, у которого коэффициенты при всех степенях x равны 1 :

$$P_{2n}(x) = x^{2n} + x^{2n-1} + \dots + x^2 + x + 1 = \sum_{k=0}^{2n} x^k, \quad n > 2.$$

Необходимо удвоить у него несколько коэффициентов (больше одного) так, чтобы полученный многочлен можно было представить в виде произведения двух многочленов, каждый из которых имеет степень больше 1 . Приведите обоснованное решение.

Задание 2 (10 баллов)

Про натуральное число n сделано пять утверждений:

$$\begin{cases} 3n > 91 \\ n < 120 \\ 4n > 37 \\ 2n \geq 21 \\ n > 7 \end{cases}$$

Известно, что только три из них верны, а два неверны. Найдите n .

Задание 3 (12 баллов)

Найдите все непостоянные целочисленные арифметические прогрессии $\{a_n\}$: a_1, a_2, a_3, \dots , для первых трех членов которых выполняется соотношение:

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3.$$



Задание 4 (12 баллов)

Найдите последнюю цифру числа:

$$7^{2021^{2022}} - 3^{20^{19}}.$$

Задание 5 (13 баллов)

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} z^2 + 2xy + 9 = 0 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$$

Задание 6 (13 баллов)

На велотреке одновременно уходят со старта **5** велосипедистов. Скорость первого равна **50** км/ч, второго – **40** км/ч, третьего – **30** км/ч, четвертого – **20** км/ч, пятого – **10** км/ч. Первый велосипедист считает количество велосипедистов, которых он обогнал.

Какого велосипедиста он посчитал 21-м? В момент старта обгон не считается.

Задание 7 (13 баллов)

На основании **AC** треугольника **ABC** взята точка **D**. Докажите, что окружности, вписанные в треугольники **ABD** и **CBD**, точками касания не могут делить отрезок **BD** на три равные части.

Задание 8 (15 баллов)

У Вики имеется **45** монет, веса которых – все натуральные числа от **1** до **45** (все монеты имеют разный вес). Могла ли Вика раздать своим друзьям Сереже и Воле по **15** монет так, чтобы выполнялось условие: какие бы две свои монеты ни положили на одну чашу весов Сережа и Вова – по одной каждый, Вика всегда сможет положить на другую чашу весов одну или две монеты так, чтобы весы уравнились?

