

Плехановская олимпиада школьников 2021, заочный тур

- 1 Набор, состоящий из чисел a, b, c , заменили на набор $\{a^4 - 2b^2, b^4 - 2c^2, c^4 - 2a^2\}$. В результате получившийся набор совпал с исходным. Найдите числа a, b, c , если $a + b + c = -3$. В ответ запишите произведение чисел $a \cdot b \cdot c$.
- 2 Рассматриваются квадратные трехчлены вида $x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами при условии $p + q = 30$. Сколько таких многочленов имеют целые корни?
- 3 В трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD , а диагональ BD перпендикулярна боковой стороне AB . На продолжениях боковых сторон за меньшее основание трапеции BC отложены отрезки BM и CN так, что получилась новая трапеция $BMNC$, подобная трапеции $ABCD$. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если площадь трапеции $AMND$ равна 8, а сумма углов CAD и BDA равна 60° .
- 4 Найдите значение выражения $A = \frac{0.75 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + \dots + 2022 \cdot 3^{2021}}{3^{2022}}$. В ответе указать число $4 \cdot A$.
- 5 При подготовке к заочному туру Плехановской олимпиады школьников три абитуриента решали 100 задач. Каждый абитуриент решил по 60 задач, причем каждую задачу кто-нибудь решил. Задача считается трудной, если её решил только один абитуриент. Легкой считается задача, которую решили все три абитуриента. Каких задач больше — легких или трудных? В ответе записать разность $(n - m)$, где n — число легких задач, m — трудных.

- 6 В шаре проведены три взаимно перпендикулярных диаметра, каждый из которых разделен на три равных отрезка, и через каждую точку деления проведена плоскость, перпендикулярная диаметру. На сколько частей эти плоскости делят поверхность шара?

- 7 Решить уравнение

$$x = \arccos \left(\frac{\cos 5x}{\cos 4x} \right)$$

В ответе указать число $\frac{2 \cdot A}{\pi}$, где A — сумма всех решений данного уравнения.

- 8 Найти все значения параметров a и b , при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ \left| \frac{x^y - 1}{x^y + 1} \right| = b \end{cases}$$

имеет только одно решение (a, b, x, y — действительные числа, $x > 0$). В ответе укажите сумму максимально возможных целых значений a и b .

- 9 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x = e^{(y-z)^2} \\ x^2 + y^2 = 3z - 2 \end{cases}$$

В ответ записать сумму квадратов значений y для всех решений.

- 10 Квадрат 6×6 разбит на клетки размера 1×1 . Из квадрата удалены два противоположных угла (левый верхний и правый нижний). Фигурой размера $n > 1$ назовем некоторое объединение соседних n клеток. При каком минимальном n оставшуюся часть квадрата можно разбить на фигуры из n клеток?