

**ПЛЕХАНОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2021/22  
ПО МАТЕМАТИКЕ**

**1 вариант (10-11 класс)**

**Задание 1 (10 баллов).**

Числа  $x, y, z$  удовлетворяют условиям

$$2022 \cdot (x + y + z) = 1$$

и

$$xy + xz + yz = 2022 \cdot xyz.$$

Найдите:

$$A = x^{2021} + y^{2021} + z^{2021}.$$

**Задание 2 (10 баллов)**

Клиент положил в банк один миллион под **10%** годовых на десять лет. Но, когда он через десять лет пришел снимать деньги, оказалось, что несколько лет назад банк увеличил процент по вкладу до **20%**, в результате чего клиент получил больше **4** миллионов.

Сколько лет назад банк увеличил процент? В ответе укажите наименьшее целое значение.

**Задание 3 (12 баллов)**

На сторонах  $BC$  и  $BA$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $M$  и  $N$  так, что  $\angle BAM = \angle BCN$ . Биссектриса треугольника  $ABC$ , проведенная из вершины  $B$ , пересекает сторону  $AC$  в точке  $P$ , а отрезок  $MN$  – в точке  $K$ .

Докажите, что  $MK \cdot CP = NK \cdot AP$ .

**Задание 4 (12 баллов)**

Каждая из **9** клеток квадрата  $3 \times 3$  покрашена в черный или белый цвет. За один ход разрешается перекрасить **3** любые клетки в любой строке или в любом столбце в противоположный цвет. Изначально в квадрате центральная клетка – белая, все остальные восемь – черные.



Можно ли за некоторое число ходов сделать весь квадрат белым?

**Задание 5 (12 баллов)**

Решите уравнение:

$$\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} + \sqrt[3]{\frac{2x}{1+x^2}} = 1$$

**Задание 6 (14 баллов)**

Найдите все значения параметра  $p$ , при каждом из которых уравнение

$$(1,5p - 7) \cdot 32^{0,4x+0,2} + (29p - 154) \cdot 0,125^{-\frac{x}{3}} = 41 - 11p$$

имеет ровно  $10p - p^2 - 24$  различных корней.

**Задание 7 (15 баллов)**

Все рёбра правильной  $n$  - угольной пирамиды ( $n < 2022$ ) сделали векторами, поставив на каждом ребре такой пирамиды стрелку.

Найдите наибольшее значение  $n$ , при котором существует такая расстановка стрелок.

**Задание 8 (15 баллов)**

Цена акции с 1-го по 20-е февраля может увеличиваться на 1 или на 2 единицы за день или не меняться, но при этом если увеличение было на 1 пункт, то следующее увеличение обязательно будет на следующий день, если на 2 – то через день (цена не изменится строго тогда, когда цена увеличилась на 2 пункта в предыдущий день). Известно, что 9-го, 11-го и 17-го февраля цена акции не изменилась.

Найдите количество различных вариантов изменения цены акции к 20 февраля.

*Вариантом изменения называется упорядоченный набор из чисел 1 и 2, указывающий в какой последовательности менялась цена.*



**ПЛЕХАНОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2021/22  
ПО МАТЕМАТИКЕ**

**2 вариант (10-11 класс)**

**Задание 1 (10 баллов).**

Числа  $x, y, z$  удовлетворяют условиям

$$2022 \cdot (x + y + z) = 1$$

и

$$xy + xz + yz = 2022 \cdot xyz.$$

Найдите:

$$A = x^{2023} + y^{2023} + z^{2023}.$$

**Задание 2 (10 баллов)**

Клиент положил в банк один миллион под **6%** годовых на десять лет. Но, когда он через десять лет пришел снимать деньги, оказалось, что несколько лет назад банк увеличил процент по вкладу до **16%**, в результате чего клиент получил больше 3 миллионов.

Сколько лет назад банк увеличил процент? В ответе укажите наименьшее целое значение.

**Задание 3 (12 баллов)**

В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $CD$ . Центр окружности, вписанной в треугольник  $BSC$ , совпадает с центром окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ .

**Задание 4 (12 баллов)**

Куб с размерами  $3 \times 3 \times 3$  содержит 27 кубиков, покрашенных в черный или белый цвет. За один ход можно взять один параллелепипед  $1 \times 1 \times 3$  и перекрасить в противоположный цвет все три его кубика. Изначально центральный кубик был черным, а остальные 26 – белыми.

Можно ли сделать так, что все кубики будут одного цвета?



### Задание 5 (12 баллов)

Решите уравнение:

$$\sqrt{\frac{2x}{1+x^2}} + \sqrt[5]{\frac{1-x^2}{1+x^2}} = 1$$

### Задание 6 (14 баллов)

Найдите все значения параметра  $p$ , при каждом из которых уравнение

$$(1,5p + 3,5) \cdot 16^{0,5x+0,25} + (2p + 3) \cdot 0,25^{-0,5x-1} = 1 + 2p$$

имеет ровно  $(-p^2 - 4p - 3)$  различных корней.

### Задание 7 (15 баллов)

Все рёбра правильной  $n$  - угольной пирамиды ( $n > 2022$ ) сделали векторами, поставив на каждом ребре такой пирамиды стрелку.

Найдите наименьшее значение  $n$ , при котором существует такая расстановка стрелок, что сумма полученных векторов будет равна нулевому вектору  $\vec{0}$ .

### Задание 8 (15 баллов)

Цена акции с 1-го по 20-е февраля может увеличиваться на 1 или на 2 единицы за день или не меняться, но при этом, если увеличение было на 1 пункт, то следующее увеличение обязательно будет на следующий день, если на 2 – то через день (цена не изменится строго тогда, когда цена увеличилась на 2 пункта в предыдущий день). Известно, что 8-го, 10-го и 15-го февраля цена акции не изменилась.

Найдите количество различных вариантов изменения цены акции к 20 февраля.

*Вариантом изменения называется упорядоченный набор из чисел 1 и 2, указывающий в какой последовательности менялась цена.*

