№задачи	Количество баллов
1 многочлены	10
2 логика, неравенства	12
3 прогрессии	12
4 целые числа, остатки	12
5 система уравнений	13
6 текстовая задача	13
7 геометрия	13
8 логика, на взвешивание, остатки	15
Σ	100

(Очный тур ПОШ, 8-9 классы)

Задание 1 (10 баллов)

Пусть дан многочлен степени $\boldsymbol{2n}$, у которого коэффициенты при всех степенях $\boldsymbol{x}$ равны $\mathbf{1}$:

$$\boldsymbol{P_{2n}(x) = x^{2n} + x^{2n-1} + \cdots + x^2 + x + 1 = \sum_{k=0}^{2n} x^k}, \qquad \boldsymbol{n > 2}.$$

Необходимо удвоить у него несколько коэффициентов (больше одного) так, чтобы полученный многочлен можно было представить в виде произведения двух многочленов, каждый из которых имеет степень больше $\mathbf{1}$. Привести обоснованное решение.

Решение: (приведенный способ отражает один из возможных вариантов решения). Удвоим все коэффициенты, кроме коэффициентов при x^{2n}, x^{2n-1}, x и свободного члена. После группировки слагаемых получим:

$$x^{2n} + x^{2n-1} + 2x^{2n-2} + 2x^{2n-3} + \cdots 2x^3 + x^2 + x + 1 =$$

$$= (x^{2n} + x^{2n-1} + x^{2n-2} + \cdots + x^3 + x^2) + (x^{2n-2} + x^{2n-3} + x^{2n-4} + \cdots + x + 1) =$$

$$= x^2 \cdot (x^{2n-2} + x^{2n-3} + \cdots + x + 1) + (x^{2n-2} + x^{2n-3} + \cdots + x + 1) =$$

$$= (x^2 + 1) \cdot (x^{2n-2} + x^{2n-3} + x^{2n-4} + \cdots + x + 1).$$

Критерии оценивания:

- *Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов*
- *Приведен неверный ответ или приведен верный ответ без обоснований – 0 баллов*

Задание 2 (10 баллов)

Про натуральное число $\boldsymbol{n}$ сделано пять утверждений:

$$\begin{cases} \boldsymbol{3n > 91} \\ \boldsymbol{n < 120} \\ \boldsymbol{4n > 37} \\ \boldsymbol{2n \geq 21} \\ \boldsymbol{n > 7} \end{cases}$$

Известно, что только три из них верны, а два неверны. Найдите $\boldsymbol{n}$.

Решение: Исходная система неравенств преобразуется к

$$\begin{cases} n > \dfrac{91}{3} & (1) \\ n \geq \dfrac{21}{2} & (2) \\ n > \dfrac{37}{4} & (3) \\ n > 7 & (4) \\ n < 120 & (5) \end{cases}$$

Первое неравенство не выполняется, поскольку в противном случае выполняются сразу четыре неравенства. Значит, $n \leq \frac{91}{3}$ и пятое неравенство выполнено. Второе неравенство также не выполняется, поскольку в противном случае выполнены четыре неравенства: (2) – (5). Значит, $n < \frac{21}{2}$. В итоге получаем, что $n = 10$.

Ответ: 10.

Критерии оценивания:

- *Приведено полное и обоснованное решение – 10 баллов*
- *Решение не приведено или дан верный ответ без обоснований – 0 баллов*

Задание 3 (12 баллов)

Найдите все непостоянные целочисленные арифметические прогрессии

$$\{\boldsymbol{a_n}\}: \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \dots,$$

для первых трех членов которых выполняется соотношение:

$$\boldsymbol{a_1 + a_2 + a_3 = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3}.$$

Решение:

Т.к. прогрессии – целочисленные и непостоянные, то

$$a_n \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{Z}, d \neq 0.$$

Значит,

$$a_1 = a_2 - d, a_3 = a_2 + d,$$

и, следовательно,

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2,$$

(что можно было вывести исходя из основного характеристического свойства элементов арифметических прогрессий).

При этом

$$a_1^3+a_2^3+a_3^3=\boxed{(a_2-d)^3}+a_2^3+\boxed{(a_2+d)^3}=$$

$$=a_2^3+(a_2-d+a_2+d)((a_2-d)^2-(a_2-d)(a_2+d)+(a_2+d)^2)=$$

$$=a_2^3+2a_2(a_2^2-2a_2d+d^2-a_2^2+d^2+a_2^2+2a_2d+d^2)=$$

$$=a_2^3+2a_2(a_2^2+3d^2)=3a_2^3+6a_2d^2.$$

С учетом соотношения из условия

$$3a_2=3a_2^3+6a_2d^2$$

$$3a_2(a_2^2+2d^2-1)=0.$$

Значит, $a_2=0$ или $a_2^2+2d^2-1=0$.

В первом случае получаем, что искомыми прогрессиями являются такие прогрессии, у которых второй член равен 0, а разность прогрессии – любое целое число, отличное от 0.

Для второго случая:

$$a_2^2+2d^2=1,$$

но поскольку $a_2, d \in \mathbb{Z}$, то полученное равенство возможно только в случае

$$a_2^2=1, d=0,$$

т.е. при $a_2=\pm 1, d=0$, что противоречит условию задачи.

Ответ: $\{\boldsymbol{a_n}\}$: $\boldsymbol{a_1=-d, a_2=0, a_3=d}, \ldots$, где $\boldsymbol{d} \in \mathbb{Z} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$.

Критерии оценивания:

- *Приведено полное обоснованное решение – 12 баллов*
- *Приведено полное обоснованное решение, но допущена одна арифметическая ошибка – 10 баллов*
- *рассмотрен частный случай – 5 баллов*
- *Задача не решена или приведен верный ответ без обоснований – 0 баллов*

Задание 4 (12 баллов)

Найти последнюю цифру числа

$$\boldsymbol{7^{2021^{2022}}-3^{20^{19}}}.$$

Решение: Пусть n – произвольное натуральное число. Последняя цифра числа 7^n равна 7, 9, 3 или 1, причем если n кратно 4, то эта последняя цифра обязательно равна 1.
Действительно, $7^{4k} = (7^4)^k = (49^2)^k = (2401)^k$.
Число $2021 = 2020 + 1 = 4m + 1$, значит
$$7^{2021^{2022}} = 7^{(2020+1)^{2022}} = 7^{4m_1} \cdot 7^1,$$
где m, m_1 – некоторые натуральные числа, но так как 7^{4k} оканчивается 1, значит $7^{4m_1} \cdot 7^1$ оканчивается цифрой 7.
Последняя цифра числа 3^n равна 3, 9, 7 или 1, причем если n кратно 4, то эта последняя цифра обязательно равна 1. В самом деле, $3^{4k} = (3^4)^k = (81)^k$.
С другой стороны, так как число 20 делится на 4, то это же верно и для числа 20^{19}.
Следовательно, первое из двух слагаемых оканчивается на цифру 7, второе – на единицу, а, значит, разность оканчивается шестеркой.

Ответ: 6.

Критерии оценивания:

- *задача решена полностью и обоснованно – 12 баллов*
- *задача решена полностью, но с арифметическими ошибками – 8 баллов*
- *задача не решена или дан верный ответ без обоснований – 0 баллов*

Задание 5 (13баллов)

Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \boldsymbol{z^2 + 2xy + 9 = 0} \\ \boldsymbol{x - y - z = 3} \end{cases}$$
Решение:
Указание к решению: выразить из второго уравнения переменную z и подставить полученное выражение в первое уравнение, после чего первое уравнение преобразуется к равной нулю сумме двух квадратов.
Ответ: $(\mathbf{3}; \mathbf{-3}; \mathbf{3})$

Критерии оценивания:

- *Приведены пример и строгое доказательство неравенств – 13 баллов*
- *Задача не решена, но есть значительные продвижения – 5 баллов*
- *Задача не решена или приведен верный ответ без обоснований – 0 баллов*

Задание 6 (13 баллов)

На велотреке одновременно уходят со старта 5 велосипедистов. Скорость первого равна **50** км/ч, второго – 40 км/ч, третьего – 30 км/ч, четвертого – 20 км/ч, пятого – 10 км/ч. Первый велосипедист считает количество велосипедистов, которых он обогнал. Какого велосипедиста он посчитал 21-м? В момент старта обгон не считается.

Решение:

Сравним скорости велосипедистов:

$$v_1 = 50;\ \ v_2 = 40 = \frac{4}{5}v_1;\ \ v_3 = 30 = \frac{3}{5}v_1;\ v_4 = 20 = \frac{2}{5}v_1;\ \ v_5 = 10 = \frac{1}{5}v_1.$$

Значит, если первый проехал 5 кругов, то второй – 4, круга, третий – 3 круга, четвертый – 2 круга, пятый – 1 круг. И все снова окажутся в одной точке. При этом первый обгонит второго 1 раз, третьего – 2 раза, четвертого – 3 раза, пятого – 4 раза. Всего он обогнал за 5 кругов 10 велосипедистов. Если он проедет еще 5 кругов, то насчитает дополнительно 10 обгонов. И все опять окажутся в одной точке. Тогда 21-м будет самый медленный велосипедист, т.е. – пятый.

Ответ: пятого (со скоростью 10 км/ч)

Критерии оценивания:

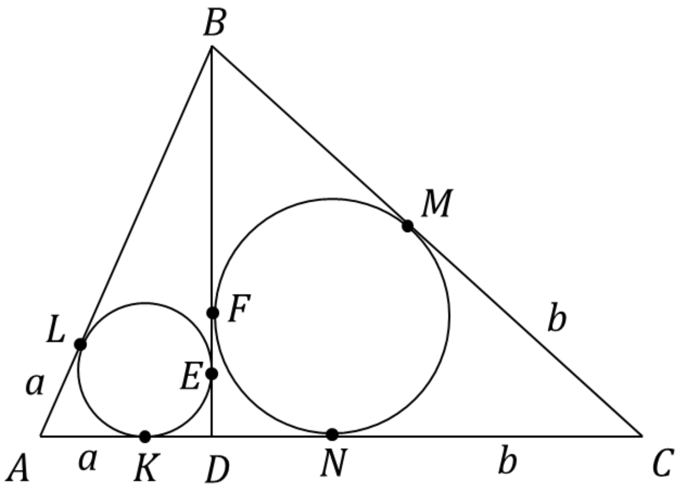
- *Приведено полное обоснованное решение – 13 баллов*
- *Задача решена полностью, но допущена арифметическая ошибка – 8 баллов*
- *Приведен неверный ответ или приведен верный ответ без обоснований – 0 баллов*

Задание 7 (13 баллов)

На основании $\boldsymbol{AC}$ треугольника $\boldsymbol{ABC}$ взята точка $\boldsymbol{D}$. Докажите, что окружности, вписанные в треугольники $\boldsymbol{ABD}$ и $\boldsymbol{CBD}$, точками касания не могут делить отрезок $\boldsymbol{BD}$ на три равные части.

Решение:

Пусть E, F, K, L, M, N – точки касания. Пусть $DE = x$, тогда если деление возможно, $FE = FB = x$.



По свойству отрезков касательных:

$$AK = AL = a;$$
$$BL = BE = 2x;$$
$$BM = BF = x;$$
$$CM = CN = b;$$
$$DK = DE = x;$$
$$DN = DF = 2x.$$

Тогда

$$AB + BC = (AL + LB) + (BM + MC) = (a + 2x) + (x + b) = a + 3x + b.$$

С другой стороны,

$$AC = AK + KD + DN + NC = a + x + 2x + b = a + 3x + b.$$

Таким образом, $AC = AB + BC$, что противоречит неравенству треугольника.

Критерии оценивания:

- *Приведено полное обоснованное доказательство – 13 баллов*
- *Полное доказательство не приведено, но имеются существенные продвижения – 5 баллов*
- *Задача не решена или приведен верный ответ без обоснований – 0 баллов*

Задание 8 (15 баллов)

У Вики имеется **45** монет, веса которых – все натуральные числа от **1** до **45** (все монеты имеют разный вес). Могла ли Вика раздать своим друзьям Сереже и Вове по **15** монет так, чтобы выполнялось условие: какие бы две свои монеты ни положили на одну чашу весов Сережа и Вова – по одной каждый, Вика всегда сможет положить на другую чашу весов одну или две монеты так, чтобы весы уравновесились?

Решение:

Рассмотрим вариант:

у Вики – монеты с весом, кратным 3;

у Сережи – монеты с весом: 1, 4, 7, …, 43 (веса делятся на 3 с остатком 1);

у Вовы – монеты с весом: 2, 5, 8, …, 44 (веса делятся на 3 с остатком 2).

Тогда сумма весов монет Сережи и Вовы тоже будет делиться на 3. И, например, 1+2=3 уравняли одной монетой; 43+44=87 уравняли двумя монетами веса 45 и 42.

Критерии оценивания:

- *Приведено полное обоснованное решение – 15 баллов*
- *Задача не решена, но имеются существенные продвижения – 6 баллов*
- *Приведен неверный ответ или приведен верный ответ без обоснований – 0 баллов*