Плехановская олимпиада школьников 2021, заочный тур

1 Набор, состоящий из чисел a, b, c, заменили на набор $\{a^4-2b^2, b^4-2c^2, c^4-2a^2\}$. В результате получившийся набор совпал с исходным. Найдите числа a, b, c, если $a+b+c=-3$. В ответ запишите произведение чисел $a \cdot b \cdot c$.

Ответ: -1.

Решение: Поскольку наборы совпали, то суммы чисел, образующих эти наборы, также совпадают:

$$a^4-2b^2+b^4-2c^2+c^4-2a^2=a+b+c=-3$$

$$(a^2-1)^2+(b^2-1)^2+(c^2-1)^2=0$$

Значит

$$\left\{\begin{array}{l} a^2-1=0 \\ b^2-1=0 \\ c^2-1=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\pm 1 \\ b=\pm 1 \\ c=\pm 1 \end{array}\right.$$

Так как $a+b+c=-3$, то $a=b=c=-1 \Rightarrow a \cdot b \cdot c=-1$

2 Рассматриваются квадратные трехчлены вида x^2+px+q с целыми коэффициентами при условии $p+q=30$. Сколько таких многочленов имеют целые корни?

Ответ: 2.

Решение:

Пусть x_1 и x_2 — целые корни трехчлена x^2+px+q. Тогда $p=-(x_1+x_2),\ q=x_1 \cdot x_2$. Откуда $30=p+q=x_1 \cdot x_2-(x_1+x_2)=(x_1-1)\cdot(x_2-1)-1$. Значит,

$$(x_1-1)\cdot(x_2-1)=31.$$

Так как число 31 — простое, то оно может быть произведением только чисел 1 и 31 или -1 и -31.

Если $\left\{\begin{array}{l} x_1-1=1 \\ x_2-1=31 \end{array}\right.$, то $\left\{\begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=32 \end{array}\right.$, значит получаем трехчлен $x^2-34x+64$.

Если $\left\{\begin{array}{l} x_1-1=-1 \\ x_2-1=-31 \end{array}\right.$, то $\left\{\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=-30 \end{array}\right.$, а, значит, искомый трехчлен x^2+30x.

3 В трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD, а диагональ BD перпендикулярна боковой стороне AB. На продолжениях боковых сторон за меньшее основание трапеции BC отложены отрезки BM и CN так, что получилась новая трапеция $BMNC$, подобная трапеции $ABCD$. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если площадь трапеции $AMND$ равна 8, а сумма углов CAD и BDA равна $60°$.

Ответ: $6,4$.

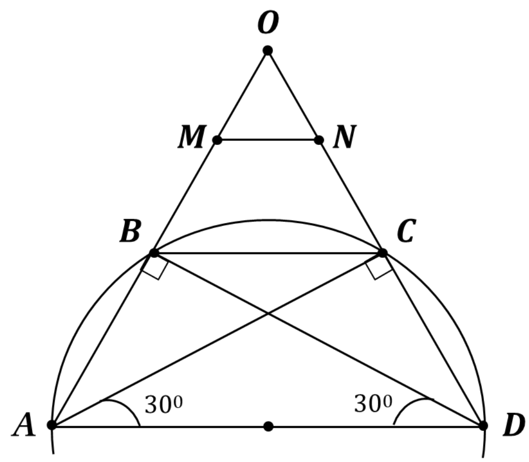
Решение: 1)$\angle ABD=\angle ACD=90°$, Значит, около трапеции можно описать окружность с диаметром AD. Пусть R — радиус этой окружности, $R=\dfrac{1}{2}AD$. 2)$ABCD$ — равнобедренная трапеция, значит

$$\angle CAD=\angle BDA=30°,$$

тогда

$$\breve{AB}=\breve{CD}=\breve{BC}=60°$$

$$\Downarrow$$



$$R = BC.$$

3) С помощью гомотетии получим из трапеции $ABCD$ трапецию $BMNC$, где O — центр гомотетии, коэффициент гомотетии $k = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{2}$.

4)

$$\frac{S_{BMNC}}{S_{ABCD}} = k^2 \Rightarrow S_{BMNC} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$$

$$S_{AMND} = S_{ABCD} + S_{BMNC} = \frac{5}{4} S_{ABCD}$$

Откуда

$$S_{ABCD} = \frac{4}{5} \cdot 8 = \frac{32}{4} = 6,4.$$

4 Найдите значение выражения $A = \dfrac{0.75 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + \ldots + 2022 \cdot 3^{2021}}{3^{2022}}$. В ответе указать число $4 \cdot A$.

Ответ: 4043.

Решение: Применяя формулу для суммы элементов геометрической прогрессии:

$$0.75 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + \ldots + 2022 \cdot 3^{2021} = 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + \ldots + 2022 \cdot 3^{2021} - 0.25 =$$

$$= (1+3+3^2+\ldots+3^{2021}) + (3+3^2+\ldots+3^{2021}) + (3^2+\ldots+3^{2021}) + \ldots + (3^{2020}+3^{2021}) + 3^{2021} - 0.25 =$$

$$= \left(\frac{1 \cdot (3^{2022} - 1)}{2} + \frac{3 \cdot (3^{2021} - 1)}{2} + \frac{3^2 \cdot (3^{2020} - 1)}{2} + \ldots + \frac{3^{2020} \cdot (3^2 - 1)}{2} + 3^{2021} \right) - 0.25 =$$

$$= 0.5 \cdot \left(3^{2022} + 3^{2022} + \ldots + 3^{2022} - 1 - 3 - 3^2 - \ldots - 3^{2020} + 2 \cdot 3^{2021}\right) - 0.25 =$$

$$= 0.5 \cdot \left(3^{2022} + 3^{2022} + \ldots + 3^{2022} + 3 \cdot 3^{2021} - 1 - 3 - 3^2 - \ldots - 3^{2020} - 3^{2021}\right) - 0.25 =$$

$$= 0.5 \cdot \left(2022 \cdot 3^{2022} - 0.5 \cdot (3^{2022} - 1)\right) - 0.25 =$$

$$= \frac{(4044 \cdot 3^{2022} - 3^{2022})}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{4043 \cdot 3^{2022}}{4}.$$

Значит, $A = \dfrac{4043 \cdot 3^{2022}}{4 \cdot 3^{2022}} = \dfrac{4043}{4}$, а следовательно, $4 \cdot A = 4043$.

5 При подготовке к заочному туру Плехановской олимпиады школьников три абитуриента решали 100 задач. Каждый абитуриент решил по 60 задач, причем каждую задачу кто-нибудь решил. Задача считается трудной, если её решил только один абитуриент. Легкой считается задача, которую решили все три абитуриента. Каких задач больше — легких или трудных? В ответе записать разность $(n - m)$, где n — число легких задач, m — трудных.

Ответ: -20.

Решение:

Пусть x_i - количество задач, решенных только i-м абитуриентом, y_{ij} - количество задач, решенных только i-м и j-м абитуриентом, n- количество задач, решенных всеми абитуриентами (число легких задач) Тогда число трудных задач равно $m = x_1 + x_2 + x_3$. По условию имеем систему из четырех линейных уравнений относительно 7 неизвестных

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + y_{12} + y_{23} + y_{13} + n & = & 100 \\ x_1 + y_{12} + y_{13} + n & = & 60 \\ x_2 + y_{12} + y_{23} + n & = & 60 \\ x_3 + y_{13} + y_{23} + n & = & 60 \end{cases}$$

Из этой системы можно найти, что $m - n = x_1 + x_2 + x_3 - n = 20$. Последнее равенство и дает ответ задачи.

Ответ: трудных задач на 20 штук больше, чем легких.

Другое решение состоит в применении формулы включения-исключения для подсчета мощности объединения трех множеств.

6 В шаре проведены три взаимно перпендикулярных диаметра, каждый из которых разделен на три равных отрезка, и через каждую точку деления проведена плоскость, перпендикулярная диаметру. На сколько частей эти плоскости делят поверхность шара?

Ответ: 64.

Решение: Проведем плоскости, перпендикулярные первому диаметру. Они разделят поверхность шара на 4 части. Затем проведем плоскость перпендикулярно второму диаметру. Она разделит каждую часть поверхности пополам. Получим 8 частей. Затем проведем две другие плоскости, перпендикулярные этому диаметру. Получим 16 частей. Проведем плоскость большого круга, перпендикулярную третьему диаметру. Получим 32 части. Две оставшиеся плоскости удваивают число частей сферы. Всего получим 64 части.

7 Решить уравнение

$$x = \arccos\left(\frac{\cos 5x}{\cos 4x}\right)$$

В ответе указать число $\dfrac{2 \cdot A}{\pi}$, где A — сумма всех решений данного уравнения.

Ответ: 5.

Решение:

Возьмем косинусы от обеих частей уравнения при условии, что $x \in [0; \pi]$:

$$\cos x = \frac{\cos 5x}{\cos 4x}.$$

Домножим обе части уравнения на $\cos 4x$ при условии, что $x \neq \frac{\pi}{8}$ и $x \neq \frac{5\pi}{8}$:

$\cos x \cos 4x = \cos 5x$

$\cos x \cos 4x = \cos(x + 4x)$

$\cos x \cos 4x = \cos x \cos 4x - \sin x \sin 4x$

$\sin x \sin 4x = 0$

$\sin x = 0$ или $\sin 4x = 0$

$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$

Или просто $x = \frac{\pi k}{4}$.

С учетом имеющихся условий $x \in \{0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \pi\}$.

8 Найти все значения параметров a и b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = & a \\ \left|\dfrac{x^y - 1}{x^y + 1}\right| & = & b \end{cases}$$

имеет только одно решение (a, b, x, y — действительные числа, $x > 0$). В ответе укажите сумму максимально возможных целых значений a и b.

Ответ: 1.

Решение:

Заметим, что если пара $(x; y)$ есть решение данной системы, то пара $(x; -y)$ также является решением:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ \left|\frac{x^y-1}{x^y+1}\right| = b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + (-y)^2 = a \\ \left|\frac{x^{-y}-1}{x^{-y}+1}\right| = \left|\frac{1-x^y}{1+x^y}\right| = b \end{cases}$$

Пусть $(a; b)$ — такая пара, что исходная система имеет единственное решение $(x; y)$. Поскольку $(x; -y)$ тоже решение системы, то для того чтобы система имела единственное решение, нужно потребовать, чтобы $y = -y$ и $y = 0$, а следовательно

$$a = x^2 > 0$$
$$b = \left|\frac{x^0-1}{x^0+1}\right| = 0;$$

Таким образом получаем, что если данная система имеет единственное решение, то $a > 0$, $b = 0$. Рассмотрим исходную систему при найденных значениях параметров:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ \left|\frac{x^y-1}{x^y+1}\right| = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x^y = 1 \end{cases}$$

Второе уравнение выполняется, если $x = 1$, y — любое, или если $x > 0$, $y = 0$. В первом случае получаем, что первое уравнение примет вид $1 + y^2 = a$, откуда $y = \pm\sqrt{a-1}$ при $a > 1$ и $y = 0$ при $a = 1$. Если $x > 0$, $y = 0$, то первое уравнение $x^2 + 0 = a$ имеет решение $x = \sqrt{a}$ при $a > 0$.

В итоге получаем, что при $a > 1$ система имеет три решения $(1; \pm\sqrt{a-1})$ и $(\sqrt{a}; 0)$, а при $0 < a \leq 1$ — только одно решение $(\sqrt{a}; 0)$. Значит, единственное решение система имеет только при $0 < a \leq 1$; $b = 0$.

Ответ:$0 < a \leq 1$; $b = 0$

9 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x = e^{(y-z)^2} \\ x^2 + y^2 = 3z - 2 \end{cases}$$

В ответ записать сумму квадратов значений y для всех решений.

Ответ: 5.

Решение.

$$\cos x \leqslant 1$$

$$e^a \geqslant 1 \text{ при } a \geqslant 0$$

Так что из первого уравнения следует, что обе части должны быть 1, так что

$$x = 2\pi n, y = z$$

Тогда из второго (подставляя $y = z$) имеем

$$x^2 = -y^2 + 3y - 2$$

Если $x \neq 0$, то $x^2 \geqslant 4\pi^2$, а максимум правой части достигается посередине между корнями, в точке $1,5$, и равен $0,25$, так что решений не будет.

Так что $x = 0$ и $y^2 - 3y + 2 = 0$, т.е. $y_1 = 1, y_2 = 2$. И $z = y$, как мы выяснили.

Итак, решения $(0, 1, 1)$ и $(0, 2, 2)$. И сумма квадратов y равна 5.

10 Квадрат 6x6 разбит на клетки размера 1x1. Из квадрата удалены два противоположных угла(левый верхний и правый нижний). Фигурой размера $n > 1$ назовем некоторое объединение соседних n клеток. При каком минимальном n оставшуюся часть квадрата можно разбить на фигуры из n клеток?

Ответ: 17.

Решение. Пусть N — оставшаяся часть квадрата. В ней 34 клетки. Это число должно делится на n. Таким образом, n может принимать значения $2, 17$ и 34. Разбиение на фигуры из 17-ти клеток можно получить, разрезав N вертикальной чертой посередине. Покажем, что разбить квадрат на фигуры из 2 клеток невозможно. Для этого раскрасим N в шахматном порядке (левая нижняя клетка при этом выбирается черной). Всего получается 18 черных и 16 белых клеток. Так как каждая фигура из двух клеток содержит по одной черной и одной белой клетке, то при разрезании на фигуры из двух клеток, любое множество клеток, покрытых такими фигурами, должно содержать одинаковое количество черных и белых клеток. N этому условию не удовлетворяет, следовательно не может быть разбито на фигуры размера 2.