

9 класс

1. (25 баллов) Тело бросили под углом к горизонту в момент $t = 0$ так, что вектор скорости составил с горизонтом угол 45° в моменты времени t_1 и t_2 . Найти дальность полета тела. Ускорение свободного падения равно g .

Ответ. Дальность полета равна $\frac{1}{2}g(t_2^2 - t_1^2)$.

Решение. Запишем проекции скорости тела на горизонтальную (x) и вертикальную (y) оси в виде

$$V_x = V_0 \cos \alpha, \quad V_y = V_0 \sin \alpha - gt,$$

где V_0 – начальная скорость тела, а α – угол, под которым тело было брошено. В момент t_1 выполняется условие $V_y = V_x$, т.е.

$$V_0 \sin \alpha - gt_1 = V_0 \cos \alpha,$$

а в момент t_2 – условие $V_y = -V_x$, т.е.

$$V_0 \sin \alpha - gt_2 = -V_0 \cos \alpha.$$

Складывая записанные уравнения, получаем

$$2V_0 \sin \alpha = g(t_2 + t_1),$$

а вычитая одно из другого, получаем

$$2V_0 \cos \alpha = g(t_2 - t_1).$$

Перемножая полученные формулы, приходим к соотношению

$$V_0^2 \sin 2\alpha = \frac{1}{2}g^2(t_2^2 - t_1^2),$$

подставляя которое в формулу для дальности полета $L = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, окончательно получаем

$$L = \frac{1}{2}g(t_2^2 - t_1^2).$$

Разбалловка. Записаны формулы для V_x и V_y – 5 баллов.

Записаны уравнения $V_y = V_x$ и $V_y = -V_x$ – 5 баллов.

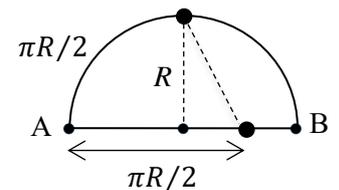
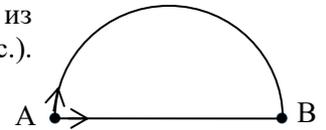
Записана общая формула для дальности полета – 5 баллов.

Получен ответ – 10 баллов.

2. (25 баллов) Два жучка одновременно начинают бежать с равными скоростями из точки А в точку В: один по прямой, другой по полуокружности радиуса R (см. рис.). Каким будет максимальное расстояние между жучками?

Ответ. Максимальное расстояние равно $R\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2} \approx 1,15R$.

Решение. Расстояние между жучками достигает максимума в тот момент, когда векторы скоростей жучков оказываются параллельными, т.е. когда бегущий по полуокружности жучок проходит ее половину. Действительно, в этот момент жучки движутся в одном направлении с одинаковой скоростью, т.е. расстояние между ними на мгновение перестает меняться, тогда как до этого оно увеличивалось. Далее жучки начинают сближаться. Расстояние L между жучками в указанный момент находим как гипотенузу прямоугольного треугольника (см. рис.)



$$L = R\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2} \approx 1,15R.$$

Разбалловка. Указан (с обоснованием) момент достижения максимального расстояния – 10 баллов.
Найдено максимальное расстояние – 15 баллов.

3. (25 баллов) Один шар массы m равномерно всплывает в вязкой жидкости, а другой, имеющий равный с ним радиус и массу $2m$, равномерно погружается в этой жидкости с той же скоростью. Какой будет сила натяжения нити, если скрепить ею шары и поместить их в ту же жидкость? Ускорение свободного падения равно g .

Ответ. Сила натяжения нити будет равна $mg/2$.

Решение. Запишем условие баланса сил для равномерно всплывающего шара

$$F_A = mg + F_{\text{сопр}}$$

и равномерно погружающегося

$$2mg = F_A + F_{\text{сопр}}.$$

Здесь через F_A и $F_{\text{сопр}}$ обозначены сила Архимеда и сила сопротивления, одинаковые для обоих шаров в силу равенства их радиусов и скоростей. Исключая из записанных уравнений $F_{\text{сопр}}$, находим

$$F_A = \frac{3}{2}mg.$$

Нетрудно видеть, что для скрепленных нитью шаров полная сила тяжести $3mg$ будет в точности компенсироваться суммарной силой Архимеда $2F_A = 3mg$. Это означает, что скрепленные шары будут неподвижно висеть в жидкости: легкий сверху, тяжелый снизу. Чтобы найти силу натяжения нити, запишем условие баланса сил для одного из шаров, например, верхнего (легкого)

$$F_A = mg + T.$$

Отсюда получаем

$$T = F_A - mg = mg/2.$$

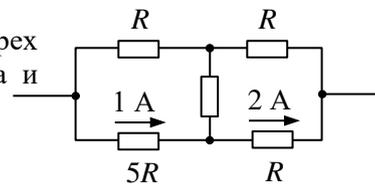
Разбалловка. Записано условие баланса сил для несскрепленных шаров – по 5 баллов за шар.

Найдена сила Архимеда – 5 баллов.

Показана неподвижность скрепленных шаров – 5 баллов.

Найдена сила T – 5 баллов.

4. (25 баллов) В приведенной на рисунке цепи известны сопротивления четырех резисторов и токи в двух из них. Найти сопротивление пятого резистора и полный ток, проходящий через цепь.



Ответ. Сопротивление резистора равно R . Полный ток равен 5 А.

Решение. По резистору с неизвестным сопротивлением R_x течет, очевидно, ток 1 А в направлении сверху вниз. Обозначим ток в левом верхнем резисторе через I , тогда в правом верхнем резисторе ток равен $I - 1$. Одно и то же напряжение на всей цепи можно записать и как сумму напряжений на верхних резисторах, и как сумму напряжений на нижних, т.е. получить уравнение

$$IR + (I - 1)R = 5R + 2R$$

откуда находим, что $I = 4$ А. Тогда полный ток находим, например, как сумму токов в левом верхнем и левом нижнем резисторах, что дает 5 А. Чтобы найти R_x , запишем напряжение на левом нижнем резисторе как сумму напряжений на левом верхнем резисторе и на R_x , т.е.

$$5R \cdot 1 = R \cdot 4 + R_x \cdot 1$$

откуда находим, что $R_x = R$.

Разбалловка. Найдены токи в верхних резисторах – 10 баллов.

Найден полный ток – 5 баллов.

Найдено сопротивление резистора – 10 баллов.