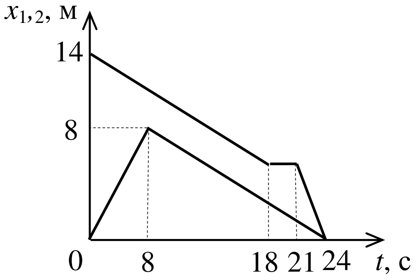
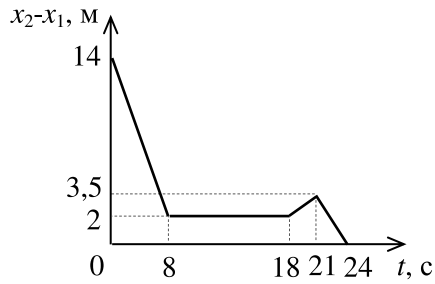
8 класс

1. (25 баллов) График зависимости от времени координат x_1 и x_2 двух тел, совершающих движение вдоль оси x, приведен на рисунке. Нарисовать график зависимости расстояния между телами от времени. Найти максимальную скорость сближения тел.



Ответ. См. график на рисунке. Максимальная скорость сближения тел равна 1,5 м/с.

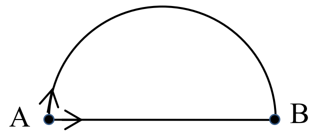


Решение. Один вариант нахождения максимальной скорости сближения – непосредственно по данному в условии графику. Тела сближаются на интервалах времени 0-8 с и 21-24 с. Сравним скорости сближения на этих интервалах. На интервале 0-8 с одно тело (пусть первое) удаляется от начала координат со скоростью 1 м/с, а другое (второе) приближается к началу со скоростью 0,5 м/с (эту скорость можно найти по параллельному участка графика первого тела). Следовательно, на интервале 0-8 с скорость сближения равна 1,5 м/с. На интервале 21-24 с первое тело приближается к началу со скоростью 0,5 м/с, а второе – движется в том же направлении со скоростью 5/3 м/с (ее можно рассчитать, учитывая, что второе тело находилось в точке $x_2 = 5$ м в момент $t = 21$ с). Следовательно, скорость сближения равна 5/3 – 1/2 = 7/6 м/с, что меньше 1,5 м/с. Таким образом, максимальная скорость сближения равна 1,5 м/с.

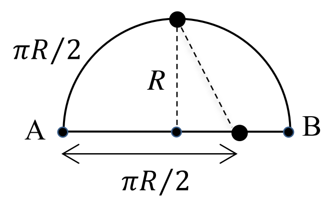
Другой вариант решения задачи – построение сначала графика зависимости расстояния между телами от времени (см. рис.), а затем нахождение по нему максимальной скорости сближения.

Разбалловка. Нарисован график зависимости расстояния между телами от времени – 10 баллов.
Рассчитаны скорости сближения на двух участках – по 5 баллов за участок.
Проведено сравнение и найдена максимальная скорость сближения – 5 баллов.

2. (25 баллов) Два жучка одновременно начинают бежать с равными скоростями из точки А в точку В: один по прямой, другой по полуокружности радиуса R (см. рис.). Каким будет максимальное расстояние между жучками?



Ответ. Максимальное расстояние равно $R\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)^2} \approx 1{,}15R$.



Решение. Расстояние между жучками достигает максимума в тот момент, когда векторы скоростей жучков оказываются параллельными, т.е. когда бегущий по полуокружности жучок проходит ее половину. Действительно, в этот момент жучки движутся в одном направлении с одинаковой скоростью, т.е. расстояние между ними на мгновение перестает меняться, тогда как до этого оно увеличивалось. Далее жучки начинают сближаться. Расстояние L между жучками в указанный момент находим как гипотенузу прямоугольного треугольника (см. рис.)

$$L = R\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)^2} \approx 1{,}15R.$$

Разбалловка. Указан (с обоснованием) момент достижения максимального расстояния – 10 баллов.
Найдено максимальное расстояние – 15 баллов.

3. (25 баллов) Один шар массы m равномерно всплывает в вязкой жидкости, а другой, имеющий равный с ним радиус и массу $2m$, равномерно погружается в этой жидкости с той же скоростью. Какой будет сила натяжения нити, если скрепить ею шары и поместить их в ту же жидкость? Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Сила натяжения нити равна $mg/2$.

Решение. Запишем условие баланса сил для равномерно всплывающего шара

$$F_{\text{А}} = mg + F_{\text{сопр}}$$

и равномерно погружающегося

$$2mg = F_{\text{А}} + F_{\text{сопр}}.$$

Здесь через $F_{\text{А}}$ и $F_{\text{сопр}}$ обозначены сила Архимеда и сила сопротивления, одинаковые для обоих шаров в силу равенства их радиусов и скоростей. Исключая из записанных уравнений $F_{\text{сопр}}$, находим

$$F_{\text{А}} = \frac{3}{2}mg.$$

Нетрудно видеть, что для скрепленных нитью шаров полная сила тяжести $3mg$ будет в точности компенсироваться суммарной силой Архимеда $2F_{\text{А}} = 3mg$. Это означает, что скрепленные шары будут неподвижно висеть в жидкости: легкий сверху, тяжелый снизу. Чтобы найти силу натяжения нити, запишем условие баланса сил для одного из шаров, например, верхнего (легкого)

$$F_A = mg + T.$$

Отсюда получаем

$$T = F_A - mg = mg/2.$$

Разбалловка. Записано условие баланса сил для нескрепленных шаров – по 5 баллов за шар.
Найдена сила Архимеда – 5 баллов.
Показана неподвижность скрепленных шаров – 5 баллов.
Найдена сила T – 5 баллов.

4. (25 баллов) Два одинаковых цилиндрических сосуда с площадью дна S стоят рядом на горизонтальном столе и соединены на высоте H тонкой трубкой. Один сосуд заполнен водой до уровня $3H/2$, во втором находится вода и кусок пробки объемом V_0, удерживаемый полностью погруженным с помощью прикрепленной к дну нити. Какими станут уровни воды в сосудах, если нить перерезать? Плотности воды и пробки равны $\rho_в$ и $\rho_п$.

Ответ. При $\left(1-\frac{\rho_п}{\rho_в}\right)\frac{V_0}{S} < H$ в сосудах будет одинаковый уровень воды $\frac{3H}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\rho_п}{\rho_в}\right)\frac{V_0}{S}$. При $\left(1-\frac{\rho_п}{\rho_в}\right)\frac{V_0}{S} > H$ в сосуде с пробкой уровень станет равным $2H-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\rho_п}{\rho_в}\right)\frac{V_0}{S}$, в другом сосуде H.

Решение. Рассмотрим сосуд, в котором есть вода и пробка. Уровень воды в нем такой же, как и в другом сосуде, т.е. $3H/2$ (сообщающиеся сосуды). После перерезания нити плавающая пробка станет вытеснять объем воды $\frac{\rho_п}{\rho_в}V_0$, меньший, чем объем V_0, который вытесняла полностью погруженная пробка. Если бы сосуд не был соединен с другим, уровень воды в нем понизился бы на величину $\left(1-\frac{\rho_п}{\rho_в}\right)\frac{V_0}{S}$. Однако при понижении уровня в этом сосуде в него начнет перетекать вода из другого сосуда. Если $\left(1-\frac{\rho_п}{\rho_в}\right)\frac{V_0}{S} < H$, то уровень воды в сосудах останется выше уровня трубки, а понижение уровня воды в каждом сосуде составит $\frac{1}{2}\left(1-\frac{\rho_п}{\rho_в}\right)\frac{V_0}{S}$. Таким образом, в сосудах установится уровень воды $\frac{3H}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\rho_п}{\rho_в}\right)\frac{V_0}{S}$. Если же $\left(1-\frac{\rho_п}{\rho_в}\right)\frac{V_0}{S} > H$, то в сосуд с пробкой перетечет вся вода, которая была выше уровня трубки в другом сосуде. В результате в сосуде с пробкой уровень воды станет равным $\frac{3H}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\rho_п}{\rho_в}\right)\frac{V_0}{S}+\frac{H}{2} = 2H-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\rho_п}{\rho_в}\right)\frac{V_0}{S}$, а в другом сосуде H.

Разбалловка. Найдено понижение уровня воды в сосуде с пробкой без перетекания – 5 баллов.
Найдены уровни воды в сосудах при $\left(1-\frac{\rho_п}{\rho_в}\right)\frac{V_0}{S} < H$ – по 5 баллов за сосуд.
Найдены уровни воды в сосудах при $\left(1-\frac{\rho_п}{\rho_в}\right)\frac{V_0}{S} > H$ – по 5 баллов за сосуд.