

10 класс

1. (30 баллов) Два тела одновременно бросили под одним и тем же углом к горизонту с начальными скоростями, отличающимися по величине в два раза. При каком угле броска величины скоростей тел могут оказаться равными в некоторый момент полета тел?

Ответ. Угол броска должен быть больше 60° .

Решение. Обозначим начальные скорости тел через V_0 и $2V_0$, а угол броска через α . Запишем квадраты скоростей тел в произвольный момент времени t как

$$V_1^2 = (V_0 \cos \alpha)^2 + (V_0 \sin \alpha - gt)^2, \quad V_2^2 = (2V_0 \cos \alpha)^2 + (2V_0 \sin \alpha - gt)^2$$

и составим разность квадратов:

$$V_2^2 - V_1^2 = 3V_0^2 - 2V_0 \sin \alpha gt.$$

Равенство скоростей достигается в момент

$$t = \frac{3V_0}{2g \sin \alpha}$$

при условии, что это время меньше времени полета тела, брошенного с меньшей скоростью, т.е. меньше, чем $2V_0 \sin \alpha / g$. Из данного условия получаем, что

$$\sin \alpha > \frac{\sqrt{3}}{2},$$

т.е. $\alpha > 60^\circ$.

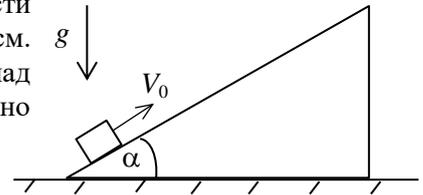
Разбалловка: Записаны выражения для (квадратов) скоростей тел – по 5 баллов за тело.

Найден момент сравнения скоростей – 5 баллов.

Проведено сравнение с меньшим временем полета тел – 10 баллов.

Получен правильный ответ – 5 баллов.

2. (40 баллов) Кубику массой m сообщили скорость V_0 вдоль поверхности гладкого клина массой $2m$, стоящего на гладком горизонтальном столе (см. рис.). Угол при основании клина равен α . Какую работу совершит над кубиком сила реакции клина к моменту, когда скорость кубика относительно клина обратится в нуль? Ускорение свободного падения равно g .



Ответ. Работа силы реакции будет равна $-\frac{1}{9}mV_0^2 \cos^2 \alpha$.

Решение. В момент остановки кубика на клине оба тела имеют относительно стола одну и ту же скорость, направленную горизонтально. Обозначим ее через V_1 . Из сохранения проекции импульса на горизонтальное направление следует соотношение

$$mV_0 \cos \alpha = 3mV_1,$$

откуда находим

$$V_1 = \frac{1}{3}V_0 \cos \alpha.$$

По закону сохранения механической энергии для системы тел «кубик + клин» запишем

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{3mV_1^2}{2} + mgh,$$

где через h обозначена высота подъема кубика над столом. Работа силы реакции клина над кубиком равна изменению механической энергии кубика, т.е.

$$A = \frac{mV_1^2}{2} + mgh - \frac{mV_0^2}{2}.$$

Исключая mgh из двух последних уравнений, получаем

$$A = -mV_1^2.$$

(Это соотношение можно также получить из соображений, что работа клина над кубиком равна с обратным знаком работе кубика над клином, т.е. приращению кинетической энергии клина.) Используя найденное выше значение V_1 , окончательно получаем

$$A = -\frac{1}{9}mV_0^2 \cos^2 \alpha.$$

Разбалловка. Использовано равенство скоростей кубика и клина в момент остановки – 5 баллов.
Записан закон сохранения импульса системы брусок-кубик – 5 баллов.
Найдена скорость тел в момент остановки – 5 баллов.
Записано выражение для работы через изменение энергии – 15 баллов.
Получен ответ – 10 баллов.

3. (30 баллов) Подвешенный на нити длины L шарик отклонили от вертикали так, что нить образовала прямой угол с вертикалью, и отпустили. При прохождении нижнего положения шарик испытал абсолютно неупругое соударение с движущимся навстречу другим шариком той же массы. Какой была скорость этого шарика, если натяжение нити не изменилось в результате соударения? Ускорение свободного падения равно g .

Ответ. Скорость шарика была равной $2\sqrt{2gL}$.

Решение. Записывая закон сохранения энергии для шарика на нити в виде

$$\frac{mV_0^2}{2} = mgL,$$

где m – масса шарика, находим скорость этого шарика в нижней точке перед соударением с другим шариком

$$V_0 = \sqrt{2gL}.$$

Обозначив скорость другого шарика через V_1 , запишем закон сохранения импульса системы из двух шариков в виде

$$mV_0 - mV_1 = 2mV_2,$$

где V_2 – скорость слипшихся шариков после соударения. Запишем далее второй закон Ньютона для шарика на нити в проекции на направление нити непосредственно перед ударом в виде

$$\frac{mV_0^2}{L} = T - mg,$$

откуда выразим силу натяжения нити перед ударом

$$T = \frac{mV_0^2}{L} + mg.$$

После соударения второй закон Ньютона для слипшихся шариков принимает вид

$$\frac{2mV_2^2}{L} = T' - 2mg,$$

откуда выражаем силу натяжения нити сразу после удара

$$T' = \frac{2mV_2^2}{L} + 2mg.$$

Приравняв силы, получаем соотношение

$$2V_2^2 + gL = V_0^2.$$

Подставляя в него найденное выше значение $V_0 = \sqrt{2gL}$, находим, что

$$V_2 = \pm\sqrt{gL/2} = \pm V_0/2.$$

Подстановка данного выражения в записанный выше закон сохранения импульса дает $V_1 = 0$ при выборе верхнего (положительного) знака (это решение не соответствует условию) и $V_1 = 2V_0 = 2\sqrt{2gL}$ при выборе нижнего (отрицательного) знака.

Разбалловка. Записан закон сохранения энергии и найдена скорость шарика на нити – 5 баллов.
Записан закон сохранения импульса – 5 баллов.
Записан второй закон Ньютона до удара – 5 баллов.
Записан второй закон Ньютона после удара – 5 баллов.
Приравниванием сил получено соотношение между скоростями шариков – 5 баллов.
Найдена искомая скорость – 5 баллов.