10 класс

1. (25 баллов) Тело бросили под углом к горизонту в момент $t = 0$ так, что вектор скорости составил с горизонтом угол 45° в моменты времени t_1 и t_2. Найти дальность полета тела. Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Дальность полета равна $\frac{1}{2}g(t_2^2 - t_1^2)$.

Решение. Запишем проекции скорости тела на горизонтальную (x) и вертикальную (y) оси в виде

$$V_x = V_0 \cos\alpha, \quad V_y = V_0 \sin\alpha - gt\ ,$$

где V_0 – начальная скорость тела, а α – угол, под которым тело было брошено. В момент t_1 выполняется условие $V_y = V_x$, т.е.

$$V_0 \sin\alpha - gt_1 = V_0 \cos\alpha,$$

а в момент t_2 – условие $V_y = -V_x$, т.е.

$$V_0 \sin\alpha - gt_2 = -V_0 \cos\alpha.$$

Складывая записанные уравнения, получаем

$$2V_0 \sin\alpha = g(t_2 + t_1),$$

а вычитая одно из другого, получаем

$$2V_0 \cos\alpha = g(t_2 - t_1).$$

Перемножая полученные формулы, приходим к соотношению

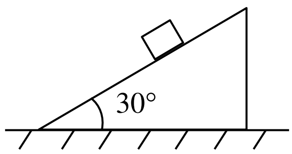
$$V_0^2 \sin 2\alpha = \frac{1}{2}g^2(t_2^2 - t_1^2),$$

подставляя которое в формулу для дальности полета $L = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, окончательно получаем

$$L = \frac{1}{2}g(t_2^2 - t_1^2).$$

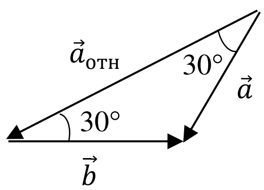
Разбалловка. Записаны формулы для V_x и V_y – 5 баллов.
Записаны уравнения $V_y = V_x$ и $V_y = -V_x$ – 5 баллов.
Записана общая формула для дальности полета – 5 баллов.
Получен ответ – 10 баллов.

2. (25 баллов) На гладкую наклонную грань клина, находящегося на гладком горизонтальном столе, положили брусок (см. рис.). При каком соотношении масс бруска и клина ускорения этих тел будут равны по величине? Угол при основании клина равен 30°.



Ответ. Масса бруска в 2 раза больше массы клина.

Решение. Ускорение бруска $\vec{a}$ можно представить в виде векторной суммы его ускорения относительно клина $\vec{a}_{\text{отн}}$, направленного вдоль наклонной грани клина вниз, и ускорения клина $\vec{b}$, направленного горизонтально (см. рис). Из условия $a = b$ следует, что треугольник ускорений равнобедренный и, следовательно, углы при стороне $\vec{a}_{\text{отн}}$ равны и составляют 30°. Отсюда находим, что вектор $\vec{a}$ направлен под углом 60° к горизонтальной плоскости стола, а его проекция на эту плоскость равна



$$a_{\text{гор}} = a\cos 60° = a/2 = b/2.$$

Учтем далее, что в силу сохранения горизонтальной проекции импульса системы «брусок-клин» выполняется соотношение

$$ma_{\text{гор}} = Mb,$$

где m – масса бруска, а M – масса клина. С учетом предыдущей формулы получаем $m/M = 2$.

Разбалловка. Нарисован треугольник ускорений – 5 баллов.
Найдено направление вектора ускорения бруска – 5 баллов.
Получена связь ускорений бруска и клина
(из сохранения импульса или II закона Ньютона) – 10 баллов.
Получен правильный ответ – 5 баллов.

3. (25 баллов) В ходе некоторого процесса с одним молем идеального одноатомного газа его температура T возрастает от T_1 до T_2, а теплоемкость газа изменяется по закону $C = RT/T_1$, где R – молярная газовая постоянная. Чему равно отношение T_2/T_1, если совершенная газом за весь процесс работа равна нулю? Какое количество теплоты нужно отвести от газа при новом положении сосуда, чтобы газ вернулся к первоначальному объему?

Ответ. $T_2/T_1 = 2$.

Решение. Поскольку теплоемкость меняется с температурой линейно, для расчета полученного газом тепла можно использовать ее среднее значение

$$C_{\text{ср}} = R\frac{T_1 + T_2}{2T_1}.$$

Записываем полученное тепло как

$$Q = C_{\text{ср}}(T_2 - T_1) = R\frac{T_1 + T_2}{2T_1}(T_2 - T_1)$$

(эту формулу можно также получить через площадь под графиком $C(T)$) и приравниваем его к изменению внутренней энергии газа

$$\Delta U = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1).$$

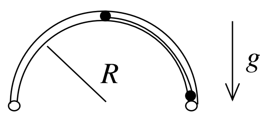
Уравнение $Q = \Delta U$ сводится к соотношению

$$\frac{T_1 + T_2}{2T_1} = \frac{3}{2}$$

откуда находим $T_2/T_1 = 2$.

Разбалловка. Записано полученное газом тепло – 10 баллов.
Записано изменение внутренней энергии газа – 5 баллов.
Записано равенство $Q = \Delta U$ – 5 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.

4. (25 баллов) Тонкая трубка согнута в виде полуокружности радиуса R и расположена в вертикальной плоскости так, как показано на рисунке. В трубке удерживаются два связанных нитью шарика равной массы – один в верхней части трубки, другой у ее среза. Какими будут скорости и ускорения шариков после их освобождения в момент, когда две третьих длины нити окажутся вне трубки? Ускорение свободного падения равно g. Трение отсутствует.



Ответ. Шарики будут иметь скорость $\sqrt{gR\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}$. Ускорение нижнего шарика будет равно $\frac{g}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, а верхнего $\frac{g}{2}\sqrt{\left(1+\frac{2\pi}{3}\right)^2+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$.

Решение. Поскольку шарики связаны нитью, их скорости будут равны по величине. Для нахождения величины скорости V в указанный в условии момент времени запишем закон сохранения энергии в виде

$$\frac{2mV^2}{2} = mg\frac{R}{2} + mg\frac{\pi R}{3},$$

где через m обозначена масса шарика и учтено, что нижний шарик опустится на высоту $\frac{2}{3}\frac{\pi R}{2} = \frac{\pi R}{3}$ ($\frac{\pi R}{2}$ – длина нити), а верхний – пройдет 2/3 четверти окружности (длине пройденной дуги соответствует угол $\frac{\pi}{3}$) и опустится на высоту $R\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right) = R/2$. Из записанного уравнения находим, что $V = \sqrt{gR\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}$.

Зная скорость V, находим центростремительное (нормальное) ускорение верхнего шарика

$$a_{1n} = \frac{V^2}{R} = g\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3}\right).$$

Чтобы найти тангенциальное (вдоль трубки) ускорение верхнего шарика и ускорение двигающегося по прямой нижнего шарика, запишем II закон Ньютона для верхнего шарика в проекции на тангенциальное направление

$$ma_{1\tau} = mg\sin\frac{\pi}{3} + T$$

и для нижнего шарика в проекции на вертикальное направление

$$ma_2 = mg - T,$$

где через T обозначена сила натяжения нити. Учитывая, что $a_{1\tau} = a_2$, из записанных уравнений находим

$$a_{1\tau} = a_2 = \frac{g}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Полное ускорение верхнего шарика находим как

$$a_1 = \sqrt{a_{1n}^2 + a_{1\tau}^2} = \frac{g}{2}\sqrt{\left(1 + \frac{2\pi}{3}\right)^2 + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Разбалловка. Найдена скорость шариков – 5 баллов.
Найдено центростремительное ускорение верхнего шарика – 5 баллов
Найдено тангенциальное ускорение верхнего шарика – 5 баллов.
Найдено полное ускорение верхнего шарика – 5 баллов.
Найдено ускорение нижнего шарика – 5 баллов.