

11 класс

11.1 Дан треугольник, у которого два угла α, β удовлетворяют соотношению $\cos \alpha + \cos \beta = \sin \alpha + \sin \beta$. Обязательно ли этот треугольник прямоугольный?

11.2. В треугольнике ABC угол B равен 60° . На сторонах AB и BC отмечены точки M и N соответственно. Оказалось, что $AM = MN = NC$. Докажите, что точка пересечения отрезков CM и AN совпадает с центром окружности, описанной около $\triangle ABC$.

11.3. Сумму $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{45}$ представили в виде дроби со знаменателем $45! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 45$. Сколькими нулями (в десятичной записи) оканчивается числитель этой дроби?

11.4. В классе 30 человек, и к Новому Году каждый послал поздравительные письма не менее, чем 16 одноклассникам. Докажите, что было не менее 45 пар взаимных поздравлений.

11 класс

11.1. Найдите наименьший период функции $y = \cos^{10} x + \sin^{10} x$.

11.2. В копилке 1000 монет достоинством в 1 руб., 2 руб. и 5 руб. на общую сумму 2000 руб. Сколько в копилке монет каждого достоинства, если известно, что количество однорублевых монет – простое число.

11.3. Дан четырехугольник $ABCD$, в который можно вписать окружность. Докажите, что две окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC , касаются диагонали AC в одной и той же точке.

11.4. а) Докажите неравенство $\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} < \sqrt{9n+3}$ для всех натуральных чисел n ;
б) существует ли такое натуральное n , для которого $[\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}] < [\sqrt{9n+3}]$? ($[a]$ — целая часть числа a).