9 класс

9.1 Дан квадратный трехчлен ax^2+bx+c, имеющий корни. Обязательно ли имеет корни квадратный трёхчлен **а**) $a^2x^2 + b^2x + c^2$? **б**) $a^3x^2 + b^3x + c^3$?

Ответ: **а**) не обязательно; **б**) обязательно. **Решение. а**) Рассмотрим пример квадратного трёхчлена x^2+x-6, имеющего корни (- 3 и 2), в то время как трехчлен x^2+x+36 корней не имеет. **б)** Имеем $b^2 \ge 4ac$, так как у исходного трехчлена дискриминант неотрицательный. Если $ac > 0$, то возведём неравенство (с положительной правой и левой частью) в куб и получим: $b^6 \ge 64a^3c^3 > 4a^3c^3$, т.е. дискриминант и у второго трёхчлена положительный. Если же $ac \le 0$, то неравенство очевидно (в правой части отрицательное число). (*Комментарий: можно не рассматривать два случая, а воспользоваться монотонным возрастанием кубической параболы при всех действительных аргументах).*

9.2 Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. На боковой стороне BC отмечены точки K и N (K лежит между B и N). Оказалось, что $KN=AN$ и $\angle BAK = \angle NAC$. Найдите $\angle BAN$.

Ответ: 60°. **Решение.** См задачу 8.2.

9.3. Чему равно наименьшее натуральное число n, для которого найдутся натуральные x и y, удовлетворяющие уравнению а) $x\cdot(x + n) = y^2$; б) $x\cdot(x + n) = y^3$?

Ответ: **а**) n=3; **б**) n=2. **Решение.** См. задачу 8.3.

9.4. Дано 100 положительных чисел. Можно ли утверждать, что: **а**) сумма любых десяти из них меньше 10, если известно, что сумма любых семи из них меньше 7; **б)** сумма любых семи из них меньше 7, если известно, что сумма любых десяти из них меньше 10?

Ответ: **а**) можно; **б**) нельзя. **Решение.** Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ -- произвольные 10 чисел из данных 100 чисел. Требуется доказать, что их сумма меньше 10, если сумма любых семи чисел меньше 7. Обозначим

$$S_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_7,\ S_2 = x_2 + x_3 + \ldots + x_8, \ldots, S_{10} = x_{10} + x_1 + \ldots + x_6$$

(суммы S_i – циклические, они получаются, если расположить числа $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ по кругу и складывать по 7 чисел подряд, начиная с x_i), и по условию все $S_i < 7$. Тогда $S_1 + S_2 + \ldots + S_{10} = 7\cdot(x_1 + x_2 + \ldots + x_{10})$, т.к. при суммировании чисел $S_1 + S_2 + \ldots + S_{10}$ каждое x_i будет сосчитано 7 раз. Поэтому $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = \frac{1}{7}(S_1 + S_2 + \ldots + S_{10}) < \frac{1}{7}\cdot 10\cdot 7 = 10$, что и требовалось доказать. **б**) Пример можно привести такой: семь из 100 чисел равны по 1.2 , а остальные 93 числа равны по 0.01. Тогда сумма любых десяти чисел меньше 8.5, в то время как сумма самых больших семи чисел равна 8.4.

9 класс

9.1. Дано уравнение $x^3+5y=y^3+5x$. Существуют ли удовлетворяющие этому уравнению **а**) натуральные числа $x\neq y$? ; **б**) целые числа $x\neq y$?

Ответ: **а)** не существуют**; б)** не существуют. **Решение**. Имеем $x^3-y^3=5(x-y)$. Если $x\neq y$, то отсюда после деления на $(x-y)$ получим $x^2+xy+y^2=5$. **а**) Для натуральных x, y: самые маленькие (и различные) натуральные числа 1 и 2 при подстановке в левую часть последнего уравнения дают $7>5$, а значит, и при бóльших значениях левая часть будет больше правой. **б)** Если оба числа x, y отрицательны, то, сменив знаки у обоих чисел, получим ответ пункта а**)**. Если хотя бы одно из чисел x, y равно нулю, то это сразу приводит к противоречию (т.к. число 5 не является точным квадратом). Пусть теперь, для определённости, число x положительно, а y отрицательно: $y=-z$, $z>0$. Тогда имеем уравнение в натуральных числах $x^2-xz+z^2=5$. Проверим сначала z=1 и z=2. При z=1 имеем уравнение $x(x-1)=4$, а при z=2 – уравнение $x(x-2)=1$. Легко видеть, что у этих квадратных уравнения нет целых корней. Далее, приведём наше уравнение к виду $(x-\frac{z}{2})^2+\frac{3}{4}z^2=5$, и при $z\geq 3$ его левая часть больше или равна 27/4>5.

9.2 Дан остроугольный треугольник ABC. Точка M – точка пересечения его высот. Найдите угол A, если известно, что $AM = BC$.

Ответ: 45°. **Решение**. См. задачу 8.3.

9.**3** Существует ли выпуклый 27-угольник, у которого все углы различны и выражаются целым числом градусов?

Ответ: не существует. **Решение**. Сумма внешних углов выпуклого n-угольника равна 360°. Если бы все углы 27-угольника были различными натуральными числами, то сумма внешних углов была бы не меньше $1^\circ+2^\circ+...+27^\circ=378^\circ>360^\circ$. Полученное противоречие показывает невозможность такого 27-угольника.

9.4 В классе каждый мальчик дружит ровно с тремя девочками, а каждая девочка – ровно с двумя мальчиками. Может ли в этом классе быть всего: **а**) 32 человека? **б**) 30 человек?

Ответ. а) не может**; б)** может**. Решение**. См. задачу 10.4.