Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»
Математика.
Финальный тур 2021/22. ***Время выполнения – 180 минут***

Общие критерии оценивания

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Символы-Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
$+$ **20**	Полное верное решение
+. 16	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
$\pm$ **12**	Решение в целом верное, но содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
$+\!/_2$ **10**	Верно рассмотрен один (более сложный) из существенных случаев, верно получена основная оценка.
$\mp$ **8**	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
$-.$ **4**	Рассмотрены только отдельные важные случаи или имеются начальные продвижения.
$-$ **0**	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0 **0**	Решение отсутствует (участник не приступал)

Если в задаче два пункта, то только за один решенный пункт максимальная оценка 10 баллов, а другие (промежуточные) оценки соответствуют половинкам баллов приведенной таблицы. Рекомендуется сначала оценивать задачу в символах («плюс-минусах»); при необходимости оценку в символах можно дополнить значком–стрелкой вверх или вниз, что скорректирует соответствующую оценку на один балл. Например, символ $\pm\uparrow$ будет соответствовать 13 баллам.

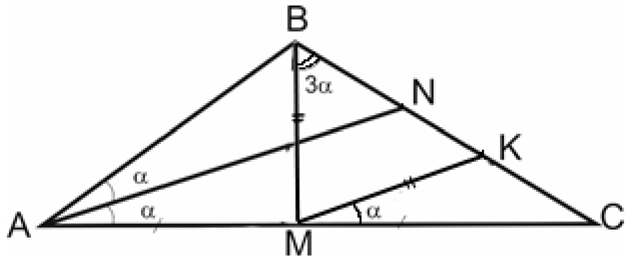
9 класс

9.1. При каких значениях числа a три графика $y = ax + a$, $y = x$ и $y = 2 - 2ax$ пересекаются в одной точке?

Ответ: при $a = 1/2$ и $a = -2$. **Решение.** Задача сводится к решению данных трёх уравнений с тремя неизвестными x, y и a. Подставим выражение для y из второго уравнения $y = x$ в первое и третье уравнение: $\begin{cases} x = ax + a \\ x = 2 - 2ax \end{cases}$. Выразим из первого уравнения системы $a = \dfrac{x}{x+1}$ и подставим во второе. В результате получим квадратное уравнение $x(x + 1) = 2(x + 1) - 2x^2 \Leftrightarrow 3x^2 - x - 2 = 0$. Отсюда $x_{1,2} = (1 \pm 5)/6$. Имеем два решения $x_1 = 1$ и $x_2 = -2/3$. Соответствующие значения a равны $a_1 = 1/2$ и $a_2 = -2$. (*Замечание:* можно не делать проверку, если заметить, что при решении мы домножили уравнение на $(x + 1)$, но среди корней нет $x = -1$).

9.2. В треугольнике ABC медиана BM вдвое меньше биссектрисы AN. Известно, что угол CBM в три раза больше угла CAN. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: $\angle A = \angle C = 36°$, $\angle B = 108°$. **Решение.** Пусть α – угол между биссектрисой AN и сторонами AB и AC. Проведем через точку M прямую, параллельную биссектрисе AN и пусть K – точка пересечения этой прямой со стороной BC. Поскольку M – середина AC, то в треугольнике ANC отрезок MK – это средняя линия.



Следовательно, $MK = \dfrac{1}{2}AN = BM$ (по условию задачи). Таким образом, треугольник BMK равнобедренный и значит, $\angle MKB = \angle MBK = 3\alpha$ (как углы при основании). Угол MKB – внешний для треугольника MKC, поэтому $\angle MKB = \angle KMC + \angle KCM$, т.е. $3\alpha = \alpha + \angle KCM$. Отсюда $\angle KCM = 2\alpha = \angle BAC$. Итак, мы получаем, что треугольник ABC равнобедренный и тогда медиана BM является высотой, т.е. треугольник BMC – прямоугольный, а сумма его острых углов $3\alpha + 2\alpha = 90° \Leftrightarrow \alpha = 18°$. В результате получаем: $\angle A = \angle C = 2\alpha = 36°$, $\angle B = 2\cdot 3\alpha = 108°$.

9.3. Для натурального числа n обозначим через $T(n)$ произведение всех его натуральных делителей (включая n). **а)** Вычислите $T(2022)$. **б)** Существует ли простое число p и натуральное число n такие, что $T(n) = p^{2022}$?

Ответ: **а)** 2022^4; **б)** не существует. **Решение.** **а)** Разложим 2022 на простые множители: $2022 = 2\cdot 3\cdot 337$. Каждый четный делитель этого числа имеет вид $2\cdot 3^a \cdot 337^b$, где показатели a, b принимают два значения 0 или 1. Количество таких упорядоченных пар (a, b) равно $4 = 2\cdot 2$. Итак, имеется ровно 4 четных делителя, и поэтому в произведение двойка войдет в четвертой степени. Аналогично, остальные простые делители 3 и 337 войдут в произведение в четвёртой степени. Таким образом, $T(2022) = 2^4\cdot 3^4\cdot 337^4 = (2022)^4$. **б)** Поскольку p – простое число, а $T(n)$ есть степень числа p, то n не имеет простых делителей, отличных от p. Пусть $n = p^y$ для некоторого натурального числа y. Тогда $T(p^y) = 1\cdot p^1\cdot p^2\cdot \ldots \cdot p^y = p^{1+2+\ldots+y}$. Отсюда

$(1+2+3+...+y)=2022$. Таким образом, требуется решить в натуральных числах квадратное уравнение $\frac{y(y+1)}{2}=2022 \Leftrightarrow y^2+y-4044=0.$ Дискриминант полученного квдратного уравнения равен 16177, это число не является точным квадратом (т.к. оканчивается на семёрку). Значит, искомого n не существует.

9.4. В клетчатом квадрате $n \times n$ каждая клетка окрашена в один из двух цветов: белый или черный. При каком наименьшем n всегда (т.е. при любой окраске) найдется прямоугольник, вершины которого совпадают с центрами четырех одинаково окрашенных клеток?

Ответ: $n = 5$. **Решение.** См. задачу 8.4.

9.5. Девочки встали в хоровод, у некоторых надеты платочки. Хоровод назовём правильным, если у каждой девочки без платочка есть соседка в платочке. **а)** Каково минимальное количество платочков в правильном хороводе из 25 девочек? **б)** Докажите, что если в данном правильном хороводе из 25 девочек больше 12 платочков, то некоторые девочки могут снять платочки, а хоровод всё равно останется правильным.

Ответ: **а**) 9. **Решение.** См. задачу 8.5.