8 класс

8.1. Дан прямоугольник, у которого длина в три раза больше ширины. Известно, что периметр прямоугольника численно равен его площади. Найдите стороны прямоугольника.

Ответ: $\frac{8}{3}$ и 8. **Решение.** См. задачу 7.1.

8.2. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. На боковой стороне BC отмечены точки K и N (K лежит между B и N). Оказалось, что $KN=AN$ и $\angle BAK = \angle NAC$. Найдите $\angle BAN$.

Ответ: 60°. **Решение.** Пусть $\angle BAK = \angle NAC = x$, $\angle KAN = y$. В равнобедренном треугольнике AKN. угол AKN (при основании) тоже равен y. Углы при основании треугольника ABC равны $2x + y$, а угол при вершине B поэтому равен $180^\circ - 2(2x + y)$. Внешний угол $\angle AKN = y$ в треугольнике AKB равен $x + 180^\circ - 2(2x + y) = 180^\circ - 3x - 2y$. Тогда из уравнения $y = 180^\circ - 3x - 2y$ получаем $x + y = 60^\circ$, т.е. $\angle BAN = 60^\circ$.

8.3. Чему равно наименьшее натуральное число n, для которого найдутся натуральные x и y, удовлетворяющие уравнению **а)** $x \cdot (x + n) = y^2$; **б)** $x \cdot (x + n) = y^3$?

Ответ: **а**) $n = 3$; **б**) $n = 2$. **Решение. а**) При $n = 3$ такие x и y существуют: $x = 1,\ y = 2$. Невозможность значений $n = 1$ и $n = 2$ следует из неравенств $x^2 < x(x+1) < (x+1)^2$ и $x^2 < x(x+2) < (x+1)^2$. **б)** При $n = 2$ такие x и y существуют: $x = 2,\ y = 2$. При $n = 1$ из уравнения $x(x+1) = y^3$ следует, что два последовательных натуральных числа x и $(x+1)$ являются кубами натуральных чисел, т.к. x и $(x+1)$ – взаимно простые числа (действительно: если произведение ab двух взаимно простых чисел a и b есть точный куб, то кубы простых чисел, входящие в разложение этого произведения на простые множители, входят в разложение только одного из этих чисел – a или b). но очевидно, что это невозможно (кубы соседних натуральных чисел отличаются не меньше, чем на 7= $2^3 - 1^3$.

8.4 В ряд выложены 23 одинаковые по виду монеты: настоящие и фальшивые. Известно, что всего фальшивых монет шесть и они лежат подряд. Они отличаются по весу от настоящих (но могут отличаться по весу и друг от друга, настоящие монеты весят одинаково). Можно ли с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь найти хотя бы одну фальшивую монету?

Ответ: можно. **Решение.** См. задачу 7.4.

8 класс

8.1. Велосипедист планировал доехать из пункта A в пункт B за 5 часов, двигаясь с постоянной скоростью. С намеченной скоростью он ехал до середины пути, а потом увеличил скорость на 25%. С новой скоростью он доехал до пункта B. Сколько времени занял весь путь?

Ответ: 4 часа 30 минут. **Решение.** См. задачу 7.1.

8.2. На доске записано несколько целых чисел. Петя заменил каждое число (стерев его) следующим образом: вместо четного числа он записал его половину, а вместо нечетного – удвоенное. Могла ли сумма новых чисел стать равной сумме исходных, если сумма исходных чисел равнялась **а**) 2021; **б**) 2022?

Ответ: **а**) не могла. **б**) могла. Обозначим через A начальную сумму четных чисел на доске, через B – сумму нечетных чисел и пусть n=A+B. Тогда имеем равенство $\frac{A}{2} + 2B = A + B \Leftrightarrow A = 2B$. Значит, сумма на доске должна быть равна $A + B = 3B = n$. В случае: **а)** n = 2021, и это приводит к противоречию с делимостью на 3. В случае б), когда n = 2022, можно привести такой пример: на доске записаны два числа a = 1348 и b = 674.

8.3. Дан остроугольный треугольник ABC. Точка M – точка пересечения его высот. Найдите угол A, если известно, что $AM = BC$.

Ответ: 45°. **Решение**. Пусть K — основание высоты из точки B. Докажем, что треугольники AMK и BKC равны. Действительно, имеем прямоугольные треугольники, у которых $\angle MAK = \angle CBK = 90° - \angle C$ и, по условию, $AM = BC$. Тогда из равенства треугольников следует, что $AK = BK$, и значит, в прямоугольном треугольнике ABK катеты равны. Поэтому $\angle A = 45°$.

8.4. В классе каждый мальчик дружит ровно с тремя девочками, а каждая девочка – ровно с двумя мальчиками. Может ли в этом классе быть всего: **а**) 32 человека? **б**) 30 человек?

Ответ. а) не может**; б)** может**. Решение**. а) Пусть m -- число мальиков, d -- число девочек. С одной стороны, число дружеских связей равно $3m$ (если просуммировать их число для всех мальчиков), с другой стороны, оно равно $2d$. Итак, $3m = 2d$. Значит, m -- четное число: $m = 2k$ для некоторого натурального k, и тогда $d = 3k$. Получаем $m + d = 5k$, поэтому в классе не может быть 32 человек. **б**) Построим пример для 30 человек: рассмотрим класс, где 12 мальчиков и 18 девочек, и разобъем учеников на пятерки (всего 6 пятёрок), состоящие из двух мальчиков и трёх девочек. В пятёрке каждый мальчик дружит с каждой девочкой (соответствующий граф для такой пятерки показан на рисунке).