Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»
Математика.
Отборочный тур 2021/22. ***Время выполнения – 90 минут***

РЕШЕНИЯ.

вариант 1.

7 класс

7.1. Дан прямоугольник, у которого длина в три раза больше ширины. Известно, что периметр прямоугольника численно равен его площади. Найдите стороны прямоугольника.

Ответ: $\frac{8}{3}$ и 8. **Решение.** Пусть x – ширина, тогда $3x$ – длина прямоугольника. Из условий задачи $2(3x+x)=3x\cdot x \Leftrightarrow 8x=3x^2$. Отсюда, деля на x ($\neq 0$), получим $x=\frac{8}{3};\ 3x=8$.

7.2. Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, в записи которых нет ни цифры 0, ни цифры 9.

Ответ: 255 744. **Решение.** Будем складывать числа столбиком. Каждая последняя цифра (например, двойка) встречается в разряде единиц столько раз, сколько имеется трехзначных чисел указанного вида с этой последней цифрой (в нашем примере -- это числа вида $\overline{xy2}$, где x, y – произвольные цифры от 1 до 8 включительно.). Значит, двойка, так же, как любая другая цифра от 1 до 8, встретится в разряде единиц $8\cdot 8\cdot = 64$ раза. Таким образом, сумма цифр в разряде единиц равна $64\cdot(1+2+...+8) = 2304$. Аналогично, в разряде десяток и сотен получим ту же сумму 2304. В итоге искомая сумма всех чисел равна

$$2304\cdot 100+2304\cdot 10+2304 = 2304\cdot 111 = 255\ 744$$

7.3. Можно ли стоящие по порядку 200 чисел: 1, 2, …, 200 переставить так, чтобы соседние числа стали отличаться либо на 3, либо на 5?

Ответ: можно. **Решение.** Переставим числа следующим образом:

1, 4, 7, 2, 5, 8, 3, 6, 9 … так можно перейти к следующей восьмёрке чисел. И для очередной восьмёрки чисел аналогичная перестановка приводит к началу следующей восьмёрки:

8n + 1, 8n + 4, 8n + 7, 8n + 2, 8n + 5, 8n + 8, 8n + 3, 8n + 6, 8(n + 1) + 1.

Поскольку 200 делится на 8, такая перестановка возможна (на последнем шаге не требуется переходить к числу 201, так что последнее число в ряду будет 198 = $8\cdot 24+6$.

7.4. В ряд выложены 23 одинаковые по виду монеты: настоящие и фальшивые. Известно, что всего фальшивых монет шесть и они лежат подряд. Они отличаются по весу от настоящих (но могут отличаться по весу и друг от друга, настоящие монеты весят одинаково). Можно ли с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь найти хотя бы одну фальшивую монету?

Ответ: можно. **Решение.** Выделим в ряду шестую, двенадцатую и восемнадцатую монеты. Поскольку между соседними выделенными монетами ровно 5 других монет, а от крайних выделенных до конца ряда тоже 5 монет, то ровно одна из выделенных монет фальшивая. Возьмём из этих трёх выделенных монет две (например, 6-ю и 12-ю) и первым взвешиванием сравним их веса. Если их веса одинаковы, то это – настоящие монеты (т.к. среди выделенных монет не может быть двух фальшивых) и значит, третья выделенная монета (под номером 18) фальшивая, так что второго взвешивания не потребуется. Если же веса при первом взвешивании отличаются, то среди этих двух монет одна настоящая, а другая – фальшивая. Поэтому третья выделенная монета (под номером 18) настоящая, и вторым взвешиванием сравним эту («эталонную») монету с той, что участвовала в первом взвешивании, пусть, для определённости – под номером 6. Равновесие во втором взвешивании покажет, что и она настоящая, а значит фальшивая – под номером 12. В противном случае, эта монета под номером 6 – фальшивая.

Вариант 2

7 класс

7.1. Велосипедист планировал доехать из пункта A в пункт F за 5 часов, двигаясь с постоянной скоростью. С намеченной скоростью он ехал до середины пути, а потом увеличил скорость на 25%. С новой скоростью он доехал до пункта B. Сколько времени занял весь путь?

Ответ: 4 часа 30 минут. **Решение**. Пусть a — расстояние между пунктами A и B, v — запланированная скорость. Тогда $\frac{a}{v}=5$. Увеличенная скорость равна $1{,}25\,v$. Весь путь велосипедист проедет за $\frac{a}{2v}+\frac{a}{2\cdot 1{,}25v}=\frac{4{,}5}{5}\frac{a}{v}=4{,}5$ (час).

7.2. Найдите сумму всех четырехзначных натуральных чисел, составленных из цифр 3, 6 и 9.

Ответ: 539946. **Решение.** Будем складывать числа столбиком. Каждая последняя цифра (например, шестёрка) встречается в разряде единиц столько раз, сколько имеется трехзначных чисел указанного вида с этой последней цифрой (в нашем примере -- это числа вида $\overline{xyz6}$, где x, y, z – произвольные наборы из цифр 3, 6 и 9. Значит, шестёрка, так же, как тройка и девятка, встретится в разряде единиц $3\cdot 3\cdot 3=27$ раз. Таким образом, сумма цифр в разряде единиц равна $27\cdot(3+6+9)=486$. Аналогично, в разряде десяток, сотен и тысяч получим ту же сумму 486. В итоге искомая сумма всех чисел равна

$$486\cdot 1000+486\cdot 100+486\cdot 10+486=486\cdot 1111=539\,946$$

7.3. Докажите, что из любых шести целых чисел можно выбрать четыре числа и обозначить их *a, b, c, d* так, чтобы два числа *ab* и *cd* давали одинаковые остатки при делении на 3.

Решение. Из данных шести целых чисел выберем a, c, имеющие одинаковые остатки при делении на 3, а затем из оставшихся четырех чисел выберем b, d, имеющие одинаковые остатки при делении на 3. Тогда a,b,c,d - искомые числа. Действительно, поскольку $a-c=3k$ и $b-d=3n$ для некоторых целых k,n, то разность $ab-cd=(c+3k)(d+3n)-cd=$ $=3(kd+nc+3kn)$ делится на 3.

7.4. Квадрат разрезали (прямым разрезом) на два прямоугольника. Оказалось, что периметры обоих прямоугольников — числа целые. Верно ли, что периметр исходного квадрата также целое число?

Ответ: неверно. **Решение.** Приведем такой пример: квадрат со стороной $\frac{2}{3}$ (периметра $\frac{8}{3}$) разрежем на два равных прямоугольника: у каждого из них длина $\frac{2}{3}$, а ширина $\frac{1}{3}$, и значит, их периметры – целые числа, равные 2.