Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»
Математика.
Финальный тур 2021/22. ***Время выполнения – 180 минут***

Общие критерии оценивания

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Символы-Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
+ **20**	Полное верное решение
+. **16**	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
$\pm$ **12**	Решение в целом верное, но содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
$+\!/2$ **10**	Верно рассмотрен один (более сложный) из существенных случаев, верно получена основная оценка.
$\mp$ **8**	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
–. **4**	Рассмотрены только отдельные важные случаи или имеются начальные продвижения.
– **0**	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0 **0**	Решение отсутствует (участник не приступал)

Если в задаче два пункта, то только за один решенный пункт максимальная оценка 10 баллов, а другие (промежуточные) оценки соответствуют половинкам баллов приведенной таблицы. Рекомендуется сначала оценивать задачу в символах («плюс-минусах»); при необходимости оценку в символах можно дополнить значком–стрелкой вверх или вниз, что скорректирует соответствующую оценку на один балл. Например, символ $\pm\uparrow$ будет соответствовать 13 баллам.

УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ.

7 класс

7.1. Натуральное число n умножили на сумму цифр числа $3n$ и полученное число ещё умножили на 2. В результате получили 2022. Найдите n.

<u>Ответ</u>: 337. **<u>Решение.</u>** Пусть $s(N)$ обозначает сумму цифр числа N. Тогда условие задачи запишется в виде $2n\cdot s(3n)=2\cdot 3\cdot 337$, т.е. $n\cdot s(3n)=3\cdot 337=1011$. Значит, $n\le 1011$, поэтому $3n$ не более, чем четырехзначное число, и $s(3n)<4\cdot 9=36$. Таким образом, $s(3n)$ не может равняться 337, а должно равняться либо 3 либо 1. Но очевидно, что равенство $s(3n) = 1$ приводит к противоречию (в этом случае $3n$ было бы степенью десятки). Значит $s(3n) = 3$, $n = 337$. Проверка подтверждает такое решение, т.к. $3n = 1011$.

7.2. Пусть a – количество шестизначных чисел, делящихся на 13, но не делящихся на 17, и b – количество шестизначных чисел, делящихся на 17, но не делящихся на 13.
Найдите $a – b$.

<u>Ответ</u>: 16290. **<u>Решение.</u>** Пусть c — количество шестизначных чисел, делящихся одновременно на 13 и 17. Тогда $a + c$ — это количество всех шестизначных чисел, делящихся на 13, и поэтому $a+c=\left[\frac{999999}{13}\right]-\left[\frac{99999}{13}\right]=76923-7692=69231.$ ($[x]$ означает целую часть числа x). Аналогично,

$b+c=\left[\frac{999999}{17}\right]-\left[\frac{99999}{17}\right]=58823-5882=52941.$ Таким образом, $a-b=(a+c)-(b+c)=$ $=16290$.

7.3. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка M такая, что $AB = BM$ и $AM = MC$. Известно, что угол B в пять раз больше угла C. Найдите углы треугольника.

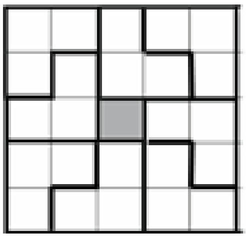
<u>Ответ.</u> $\angle A = 60°$, $\angle B = 100°$, $\angle C = 20°$. **<u>Решение</u>.** Треугольники ABM и AMC равнобедренные, поэтому углы при их основаниях равны. Обозначим эти углы x и y соответственно. Тогда по свойству внешнего угла AMB для треугольника AMC имеем $x = 2y$. Отсюда сумма углов A и C равна $x + y + y = 4y = 180° - \angle B$. По условию $\angle B = 5y$ и поэтому $9y = 180°$, значит $y = 20°$. Тогда $\angle A = 3y = 60°$, $\angle B = 5y = 100°$.

7.4. Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, а произведение этих цифр представляет собой куб некоторого натурального числа.

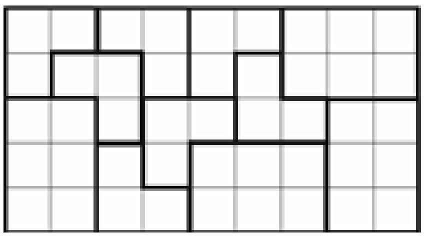
<u>Ответ:</u> 984321. **<u>Решение.</u>** Очевидно, среди цифр искомого числа x нет нуля. Произведение всех цифр от 1 до 9 равно $2^7\cdot 3^4\cdot 5^1\cdot 7^1$. Поэтому x не может содержать ни цифру 5, ни цифру 7 (иначе произведение цифр числа x должно было бы делиться на 5^3 или 7^3). Значит, x содержит не более семи оставшихся цифр, и $2^7\cdot 3^4$ делится на произведение цифр числа x. Поскольку $2^7\cdot 3^4$ не является кубом натурального числа, x не может содержать все эти семь цифр.Если мы удалим цифру 6, то оставшиеся шесть цифр дадут в произведении $2^6\cdot 3^3=12^3$. Удаление вместо шестерки любой другой цифры, очевидно, не дает произведения, равного кубу натурального числа. А удаление нескольких цифр приводит к числу, состоящему из пяти или менее цифр. Значит, x состоит из цифр 1, 2, 3, 4, 8, 9, и требование максимальности приводит к результату: $x = 984\,321$.

7.5. Какое наибольшее количество трёхклеточных уголков можно вырезать из клетчатого прямоугольника размера: **а**) 5×10 клеток; **б**) 5×9 клеток?

<u>Ответ</u>: **а**) 16; **б**) 15. **<u>Решение.</u>** **а)** Очевидно, что можно вырезать не более 16 уголков, так как



в противном случае прямоугольник должен содержать не менее 17·3=51>50 клеток. На левом рисунке показан пример разрезания одного квадрата 5×5 на 8 уголков и одну (заштрихованную) клетку. Соседний квадрат 5×5



разрезается точно так же. **б)** На правом рисунке см. пример разрезания на 15 уголков (каждый прямоугольник 2×3 здесь очевидно разрезается на два уголка).