11 класс

11.1 Дан треугольник, у которого два угла α, β удовлетворяют соотношению $\cos\alpha + \cos\beta = \sin\alpha + \sin\beta$. Обязательно ли этот треугольник прямоугольный?

Ответ: обязательно. **Решение.** Перепишем данное соотношение в виде $2\cos(\alpha+\beta)/2)\cos((\alpha-\beta)/2) = 2\sin((\alpha+\beta)/2)\cos((\alpha-\beta)/2)$.

Заметим, что $\cos((\alpha-\beta)/2) \neq 0$, т.к. в противном случае $\alpha - \beta = 180°$. Тогда $\cos(\alpha+\beta)/2) = \sin((\alpha+\beta)/2)$ и поэтому $tg((\alpha+\beta)/2) = 1$ (здесь деление на $\cos(\alpha+\beta)/2)$ возможно, т.к. синус и косинус одного и того же угла не могут быть равны 0 одновременно). Итак, $(\alpha+\beta)/2 = 45°$, т.е. $\alpha+\beta = 90°$.

11.2. В треугольнике ABC угол B равен 60°. На сторонах AB и BC отмечены точки M и N соответственно. Оказалось, что $AM = MN = NC$. Докажите, что точка пересечения отрезков CM и AN совпадает с центром окружности, описанной около ΔABC.

Решение. См. задачу 10.2.

11.3. Сумму $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{45}$ представили в виде дроби со знаменателем $45!=1\cdot2\cdot\cdots45$. Сколькими нулями (в десятичной записи) оканчивается числитель этой дроби?

Ответ: 8 нулями**. Решение.** См. задачу 10.3.

11.4. В классе 30 человек, и к Новому Году каждый послал поздравительные письма не менее, чем 16 одноклассникам. Докажите, что было не менее 45 пар взаимных поздравлений.

Решение. Всего было отправлено не менее $30\cdot16 = 480$ писем, а пар одноклассников всего $(30\cdot29)/2 = 435$. Для каждой пары одноклассников может быть одна из трёх ситуаций: a) ни один из них не писал другому; b) только один написал другому; c) они обменились письмами. Обозначим число таких пар через A, B и C, соответственно. Тогда $B + 2C \geq 480$ и $A + B + C = 435$. Отсюда $C - A \geq 480 - 435 = 45$. Значит, $C \geq 45 + A \geq 45$.

11 класс

11.1. Найдите наименьший период функции $\boldsymbol{y} = cos^{10}x + sin^{10}x$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$. **Решение.** Сначала проверяется, что $\frac{\pi}{2}$ – период функции. Действительно,

$$y(x+\frac{\pi}{2}) = (\cos^2(x+\frac{\pi}{2}))^5 + (\sin^2(x+\frac{\pi}{2}))^5 = \sin^{10} x + \cos^{10} x$$

Чтобы доказать, что это наименьший период, сделаем замену $u = \sin^2 x$. Тогда $y = (1-u)^5 + u^5$. Рассматривая функцию $y(u)$ на отрезке $[0,1]$ (это соответствует изменению x на промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$), получаем, что $y(u)$ убывает на отрезке $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ и возрастает на отрезке $\left[\frac{1}{2},1\right]$ (в этом можно убедиться, используя производную: она равна $-5(1-u)^4 + 5u^4$). Отсюда следует, что функция $y(x) = \cos^{10} x + \sin^{10} x$ не может иметь периода меньше $\frac{\pi}{2}$.

11.2. В копилке 1000 монет достоинством в 1 руб., 2 руб. и 5 руб. на общую сумму 2000 руб. Сколько в копилке монет каждого достоинства, если известно, что количество однорублевых монет – простое число.

Ответ: однорублевых монет – 3, двухрублевых – 996, пятирублевых – 1. **Решение.** Пусть x, y, z – число монет достоинством 1 руб., 2 руб. и 5 руб., соответственно. Тогда $x + y + \mathrm{z} = 1000$ и $x + 2y + 5\mathrm{z} = 2000$. Вычтем из второго уравнения первое, умноженное на 2. Получим $x = 3\mathrm{z}$. Таким образом, из условия о простоте числа x следует, что $x = 3$, и значит, $\mathrm{z} = 1$. Тогда $y = 996$..

11.3. Дан четырехугольник *ABCD*, в который можно вписать окружность. Докажите, что две окружности, вписанные в треугольники *ABC* и *ADC*, касаются диагонали *AC* в одной и той же точке.

Решение. См. задачу 10.3.

11.4. **а**) Докажите неравенство $\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} < \sqrt{9n+3}$ для всех натуральных чисел *n;* **б)** существует ли такое натуральное *n*, для которого $[\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}] < [\sqrt{9n+3}]$? ($[a]$ — целая часть числа a).

Ответ: б) не существует. **Решение.** См. задачу 10.4.