Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»
Математика.
Финальный тур 2021/22. ***Время выполнения – 180 минут***

Общие критерии оценивания

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Символы-Баллы	Правильность (ошибочность) решения
$+$ **20**	Полное верное решение
+. 16	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
$\pm$ **12**	Решение в целом верное, но содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
$+\!/\!2$ **10**	Верно рассмотрен один (более сложный) из существенных случаев, верно получена основная оценка.
$\mp$ **8**	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
$-.$ **4**	Рассмотрены только отдельные важные случаи или имеются начальные продвижения.
$-$ **0**	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0 **0**	Решение отсутствует (участник не приступал)

Если в задаче два пункта, то только за один решенный пункт максимальная оценка 10 баллов, а другие (промежуточные) оценки соответствуют половинкам баллов приведенной таблицы. Рекомендуется сначала оценивать задачу в символах («плюс-минусах»); при необходимости оценку в символах можно дополнить значком–стрелкой вверх или вниз, что скорректирует соответствующую оценку на один балл. Например, символ $\pm\uparrow$ будет соответствовать 13 баллам.

11 класс

11.1. Решите неравенство $f(f(x)) < (f(x))^2$, где $f(x) = 2x^2 - 1$.

Ответ: $x \in (-1;0) \cup (0;1)$. **Решение.** Пусть $y = 2x^2 - 1$. Тогда

$$2y^2 - 1 < y^2 \Leftrightarrow -1 < y < 1 \Leftrightarrow 0 < 2x^2 < 2 \Leftrightarrow 0 < |x| < 1.$$

11.2. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = (\arcsin x)\cdot(\arccos x)$.

Ответ: наибольшее значение $= \pi^2/16$ (при $x = \sqrt{2}/2$), наименьшее значение $= -\pi^2/2$ (при $x = -1$). **Решение.** Значения $\arcsin x$ и $\arccos x$ при любом $x \in [-1;1]$, как известно, связаны соотношением $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$. Таким образом, требуется исследовать функцию $y(t) = t(\pi/2 - t)$, где $t = \arcsin x \in [-\pi/2; \pi/2]$. Данная квадратичная функция с отрицательным старшим коэффициентом принимает наибольшее значение в точке $t = \pi/4$ (вершине параболы), равное $\pi^2/16$. Наименьшее значение принимается на границе промежутка $[-\pi/2; \pi/2]$, а именно, в точке $t = -\pi/2$ и оно равно $-\pi^2/2$ (на другом конце промежутка, при $t = \pi/2$, значение равно нулю). Соответствующие значения x, в которых достигаются наибольшее и наименьшее значения функции, таковы: $x = \sqrt{2}/2$ и $x = -1$.

11.3. Числа x, y удовлетворяют уравнению $\sqrt{x^3 + y} + \sqrt{y^3 + x} = \sqrt{x^3 + x} + \sqrt{y^3 + y}$. Можно ли утверждать, что $x = y$?

Ответ: можно. **Решение**. См. решение задачи 10.3: всюду вместо неравенств нужно рассматривать равенства, и тогда исходное уравнение приводится к уравнению $(x - y)^2(x^2 + xy + y^2) = 0$. Первый множитель обращается в 0 (только) при $x = y$, а второй – при $x = y = 0$.

11.4. Докажите, что существует бесконечное множество троек натуральных чисел x, y, z, удовлетворяющих соотношению $x^2 + y^2 = z^{2022}$.

Решение. См. задачу 10.4.

11.5. На координатной плоскости дан прямоугольник с целочисленными координатами вершин, отличный от квадрата. Докажите, что можно провести несколько прямых, параллельных сторонам прямоугольника, так, что прямоугольник разобьется на квадраты с целочисленными координатами вершин.

Решение. См. задачу 10.5.