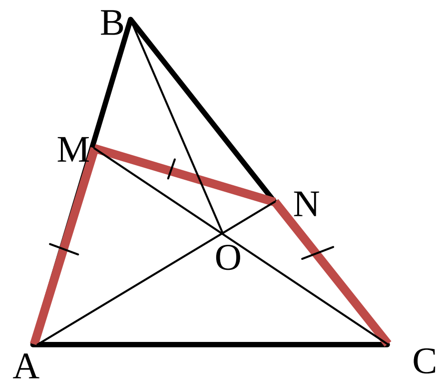
10 класс

10.1. Дан квадратный трехчлен ax^2+bx+c, имеющий корни. Обязательно ли имеет корни квадратный трёхчлен

а) $a^2x^2+b^2x+c^2$? **б)** $a^3x^2+b^3x+c^3$?

Ответ: **а**) не обязательно; **б**) обязательно. **Решение.** См. задачу 9.1.

10.2. В треугольнике ABC угол B равен 60^o. На сторонах AB и BC отмечены точки M и N соответственно. Оказалось, что $AM = MN = NC$. Докажите, что точка пересечения отрезков CM и AN совпадает с центром окружности, описанной около ΔABC.



Решение. Пусть O – точка пересечения CM и AN. Обозначим $\angle MAO=\alpha$, $\angle NCO=\beta$. Тогда в равнобедренных треугольниках AMN и MNC имеем: $\angle MNO=\alpha$, $\angle NMO=\beta$. По свойству внешнего угла $\angle MOA$ в треугольниках MNO и AOC получим: $\angle MOA=\alpha+\beta$ и $\angle MOA=180^\circ-60^\circ-(\alpha+\beta)$. Отсюда $\alpha+\beta=60^o$. Поэтому $\angle MON=120^o$, и значит, около четырехугольника $MONB$ можно описать окружность (сумма противоположных углов $\angle ABC$ и $\angle MON$ равна 180^o). Тогда $\angle MBO=MNO=\alpha$. Следовательно, ABO – равнобедренный треугольник: $AO=OB$. Аналогично, $BO=OC$.

10.3. Сумму $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{45}$ представили в виде дроби со знаменателем $45!=1\cdot2\cdot\cdots\cdot45$. Сколькими нулями (в десятичной записи) оканчивается числитель этой дроби?

Ответ: 8 нулями**. Решение.** Числитель дроби равен сумме чисел вида $1\cdot2\cdot\ldots\cdot(k-1)(k+1)\cdot\ldots\cdot45$ (в произведении отсутствует одно из натуральных чисел от 1 до 45). Обозначим такое слагаемое c_k. Заметим, что $45!=5^{10}\cdot2^{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{p}$, где $\boldsymbol{p}$ взаимно просто с 10, а $n>15$ (на самом деле $\boldsymbol{n}=\left[\frac{45}{2}\right]+\left[\frac{45}{2^2}\right]+\ldots+\left[\frac{45}{2^5}\right]=22+11+5+2+1=41$), т.е. $45!$ оканчивается 10 нулями. В числителе в указанной сумме слагаемые c_k при k, не кратном пяти, будут делиться на $5^{10}\cdot2^{10}$, т.е. такие слагаемые оканчиваются 10 нулями. Слагаемые c_k при k, кратном пяти, но не равном 25, будут делиться на $5^9\cdot2^9$ и, значит, будут оканчиваться 9 нулями. Есть только одно слагаемое, а именно, c_{25} , в которое 5 входит в 8-й степени, и только это слагаемое оканчивается 8 нулями. Значит, числитель оканчивается 8 нулями.

10.4. Дано 100 положительных чисел. Можно ли утверждать, что: **а**) сумма любых десяти из них меньше 10, если известно, что сумма любых семи из них меньше 7; **б)** сумма любых семи из них меньше 7, если известно, что сумма любых десяти из них меньше 10?

Ответ: **а**) можно; **б**) нельзя. **Решение.** См. задачу **9.4.**

10 класс

10.1. Дано уравнение $x^3 + 5y = y^3 + 5x$. Существуют ли удовлетворяющие этому уравнению **а**) натуральные числа $x \neq y$? ; **б**) действительные положительные числа $x \neq y$?

Ответ: **а)** не существуют**; б)** существуют. **Решение**. а) См. пункт а) задачи 9.1**. б)** Возьмем, например, $y = 2x$, и подставим в последнее уравнение: $x^2 + 2x^2 + 4x^2 = 5$. Тогда $x = \sqrt{\frac{5}{7}}$ и $y = 2\sqrt{\frac{5}{7}}$ удовлетворяют уравнению.

10.2. Существует ли выпуклый 27-угольник, у которого все углы различны и выражаются целым числом градусов?

Ответ: не существует. **Решение**. См. задачу 9.3.

10.3. Дан четырехугольник *ABCD*, в который можно вписать окружность. Докажите, что две окружности, вписанные в треугольники *ABC* и *ADC*, касаются диагонали *AC* в одной и той же точке.

Решение. Пусть $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$, $AC = e$, и пусть окружность, вписанная в треугольник *ABC*, касается *AC* в точке *M*. Тогда из равенства отрезков касательных получим, что $AM = \frac{a+e-b}{2}$. Аналогично, для окружности, вписанной в треугольник *ACD* и касающейся *AC* в точке *N*, получим: $AN = \frac{d+e-c}{2}$. Равенство $AM = AN$ равносильно равенству $a - b = d - c$ $\Leftrightarrow a + c = b + d$, а последнее равенство – это известное условие для четырехугольника, в который можно вписать окружность.

10.4. **а**) Докажите неравенство $\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} < \sqrt{9n+3}$ для всех натуральных чисел *n*; **б)** существует ли такое натуральное *n*, для которого $[\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}] < [\sqrt{9n+3}]$? ($[a]$ — целая часть числа *a*).

Ответ: б) не существует. **Решение.. а)** После возведения обеих частей в квадрат и отделения квадратного корня получим равносильное верное неравенство $2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1 \Leftrightarrow 4n(n+1) < 4n^2 + 4n + 1 \Leftrightarrow 0 < 1$. **б)** Предположим, от противного, что такое *n* существует. Тогда для некоторого натурального k будет выполнено двойное неравенство $\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} < k \leq \sqrt{9n+3}$. Рассмотрим неравенство $k \leq \sqrt{9n+3} \Leftrightarrow$ $k^2 \leq 9n+3$. Заметим, что квадраты целых чисел не могут давать остатки 2 и 3 при делении на 9 (можно перебрать все возможные остатки, это числа 0, 1, 4, 7). Значит, неравенство $k^2 \leq 9n+3$ означает фактически, что $k^2 \leq 9n+1 \Leftrightarrow k \leq \sqrt{9n+1}$. Поэтому $\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} < \sqrt{9n+1}$, что приводит к противоречию, т.к. на самом деле правая часть здесь меньше левой при всех n : действительно, после возведения в квадрат обеих частей и приведения подобных членов получается равносильное неравенство $\sqrt{n(n+1)} < n$, которое, очевидно, противоречиво .