Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»
Математика.
Финальный тур 2021/22. ***Время выполнения – 180 минут***

Общие критерии оценивания

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Символы-Баллы	Правильность (ошибочность) решения
$+$ **20**	Полное верное решение
+. 16	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
$\pm$ **12**	Решение в целом верное, но содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
$+\!/\!2$ **10**	Верно рассмотрен один (более сложный) из существенных случаев, верно получена основная оценка.
$\mp$ **8**	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
$-.$ **4**	Рассмотрены только отдельные важные случаи или имеются начальные продвижения.
$-$ **0**	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0 **0**	Решение отсутствует (участник не приступал)

Если в задаче два пункта, то только за один решенный пункт максимальная оценка 10 баллов, а другие (промежуточные) оценки соответствуют половинкам баллов приведенной таблицы. Рекомендуется сначала оценивать задачу в символах («плюс-минусах»); при необходимости оценку в символах можно дополнить значком–стрелкой вверх или вниз, что скорректирует соответствующую оценку на один балл. Например, символ $\pm\uparrow$ будет соответствовать 13 баллам.

10 класс

10.1. При каких значениях числа a три графика $y = ax + a$, $y = x$ и $y = 2 - 2ax$ пересекаются в одной точке?

Ответ: при a = 1/2 и a = –2. **Решение.** См. задачу **9.**1.

10.2. В треугольнике ABC медиана BM вдвое меньше биссектрисы AN. Известно, что угол CBM в три раза больше угла CAN. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: $\angle A = \angle C = 36°$, $\angle B = 108°$. **Решение.** См. задачу 9.2.

10.3. Докажите неравенство $\sqrt{x^3+y}+\sqrt{y^3+x}\ge\sqrt{x^3+x}+\sqrt{y^3+y}$.

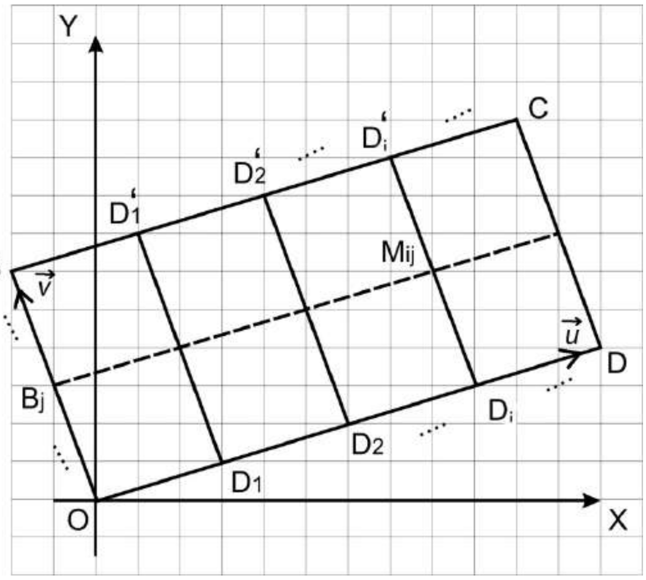
Решение. Сначала исследуем ОДЗ переменных. Поскольку $x^3 + x \ge 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) \ge 0$, то $x \ge 0$. Аналогично, $y \ge 0$. Таким образом, для неотрицательных x, y обе части неравенства имеют смысл и неотрицательны. Поэтому возведение в квадрат обеих частей приводит к равносильному неравенству, которое, (после сокращения) запишется так: $\sqrt{x^3y^3+xy+x^4+y^4}\ge\sqrt{x^3y^3+xy+xy^3+x^4y}$. После возведения в квадрат и уничтожения подобных членов оно примет вид:

$x^4 + y^4 - xy^3 - x^3y \ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^3(x - y) - y^3(x - y) \ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x - y)(x^3 - y^3) \ge 0 \quad\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x - y)^2(x^2 + xy + y^2) \ge 0$. Первый множитель $(x - y)^2 \ge 0$ при всех x, y. Второй множитель $(x^2 + xy + y^2) \ge 0$ тоже всегда неотрицателен, т.к. $x \ge 0$, $y \ge 0$ (или в силу отрицательности дискриминанта $D(y) = y^2 - 4y^2 = -3y^2$ этого квадратного трехчлена переменной x со старшим коэффициент 1).

10.4. Докажите, что существует бесконечное множество троек натуральных чисел x, y, z, удовлетворяющих соотношению $x^2 + y^2 = z^{2022}$.

Решение. Возьмем пифагорову тройку, например, (3; 4; 5), и будем рассматривать соотношения $(3t)^2 + (4t)^2 = (5t)^2$ для различных натуральных t. Если положить $x^2=9t^2, y^2=16t^2, z^{2022}=25t^2$, то взяв число z, делящееся на 5, т.е. $z = 5n$ для натурального n , получим $25t^2=5^{2022}n^{2022}\Leftrightarrow t=5^{1010}n^{1011}$. Таким образом, при любом натуральном n числа вида $x = 3t$, $y = 4t$, где $t=5^{1010}n^{1011}$, и $z = 5n$ удовлетворяют исходному уравнению.

10.5. На координатной плоскости дан прямоугольник с целочисленными координатами вершин, отличный от квадрата. Докажите, что можно провести несколько прямых, параллельных сторонам прямоугольника, так, что прямоугольник разобьется на квадраты с целочисленными координатами вершин.



Решение. Пусть $ABCD$ — данный прямоугольник. Без ограничения общности можно считать, что $A = O$ – начало координат: иначе сместим начало координат в точку A, а в конце сделаем сдвиг на целочисленный вектор $\overrightarrow{AO}$. Обозначим векторы $\vec{u}=\overrightarrow{OD}=(p;\ q)$, $\vec{v}=\overrightarrow{OB}=(m;\ n)$, где p, q, m, n – целые числа. Поскольку $\vec{u}$ и $\vec{v}$ взаимно перпендикулярны, их скалярное произведение равно 0, т.е. $pm + qn = 0$ (этот факт также следует из соотношения для угловых коэффициентов перпендикулярных прямых OB и OD). Рассмотрим сначала случай, когда p и q не взаимно просты. Тогда $p = p_1k$, $q = q_1k$, k = НОД(p, q) > 1. В этом случае рассмотрим на стороне OD промежуточные точки $D_1, D_2, ..., D_{k-1}$, где $\overrightarrow{OD_i} = (p_1 i;\ q_1 i)$, i = 1, 2, …, k – 1. Проведём через точки D_i прямые, параллельные стороне OB. Они пересекут сторону BC в точках D_i', где $\overrightarrow{OD_i'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD_i'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD_i} = (m + p_1 i;\ n + q_1 i)$. Таким образом, точки D_i и D_i' имеют целочисленные координаты и тем самым, прямые $D_i D_i'$ (i = 1, 2, ..., k – 1) разбивают прямоугольник $OBCD$ на k прямоугольников с целочисленными вершинами. Назовем это разбиением первого типа. Аналогично, если m и n не взаимно просты, то прямыми, параллельными стороне OD, разобьем $OBCD$ на меньшие прямоугольники с целочисленными вершинами. Назовем это разбиением второго типа; прямые этого разбиения проходят через промежуточные точки B_j на стороне OB, где j = 1, 2, ..., l – 1, а l – наибольший общий делитель m и n, ($m = m_1 l$, $n = n_1 l$), $\overrightarrow{OB_j} = (m_1 j;\ n_1 j)$. Заметим, что в случае, когда одновременно $k > 1$ и $l > 1$, прямые первого и второго разбиений разбивают прямоугольник $OBCD$ на $k \cdot l$ равных прямоугольников с вершинами в точках M_{ij}, где $\overrightarrow{OM_{ij}} = \overrightarrow{OD_i} + \overrightarrow{OB_j} = (p_1 i + m_1 j;\ q_1 i + n_1 j)$, i = 1, 2, …, k, j = 1, 2, ..., l, т.е. все вершины имеют целочисленные координаты. Итак, приходим к случаю, когда координаты каждого из векторов $\vec{u}$, $\vec{v}$ взаимно просты. Но тогда из равенства $pm = -qn$ получим, что $p = \pm n$, $q = \pm m$ (действительно, из этого равенства следует, что p делится на n и, в то же время, n делится на p, значит, $p = \pm n$; аналогично, $q = \pm m$, с учетом знака в данном равенстве). В этом случае стороны прямоугольника $OBCD$ равны: $|OC| = \sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{n^2 + m^2} = |OB|$, и наш прямоугольник – квадрат.