Решение.

1.2.1 Время разбега самолета от момента старта до момента отрыва от земли составляет 15 секунд. Найите длину разбега, если для данной модели самолета скорость отрыва составляет 100 км/час. Считать движение самолета во время разбега равноускоренным. Ответ дайте в метрах, при необходимости округлив до ближайшего целого числа.

Решение. $v = at$, $100000/3600 = a \cdot 15$, откуда $a = 1,85$(м/с^2). Тогда $S = at^2/2 = 208$(м).)

Ответ. 208 м

1.2.2 Время разбега самолета от момента старта до момента отрыва от земли составляет 15 секунд. Найите длину разбега, если для данной модели самолета скорость отрыва составляет 100 км/час. Считать движение самолета во время разбега равноускоренным. Ответ дайте в метрах, при необходимости округлив до ближайшего целого числа.

Ответ. 208 м

1.2.3 Время разбега самолета от момента старта до момента отрыва от земли составляет 15 секунд. Найите длину разбега, если для данной модели самолета скорость отрыва составляет 100 км/час. Считать движение самолета во время разбега равноускоренным. Ответ дайте в метрах, при необходимости округлив до ближайшего целого числа.

Ответ. 208 м

1.2.4 Время разбега самолета от момента старта до момента отрыва от земли составляет 15 секунд. Найите длину разбега, если для данной модели самолета скорость отрыва составляет 100 км/час. Считать движение самолета во время разбега равноускоренным. Ответ дайте в метрах, при необходимости округлив до ближайшего целого числа.

Ответ. 208 м

2.2.1. Проектируется крытое футбольное поле прямоугольной формы длиной 90 м, шириной 60 м, которое должно освещаться четырьмя прожекторами, каждый из которых висит в какой-то точке на потолке. При этом каждый прожектор освещает круг, радиус которого равен высоте, на которой висит прожектор. Необходимо найти минимально возможную высоту потолка, при которой выполняются следующие условия: каждая точка футбольного поля освещается хотя бы одним прожектором; высота потолка должна быть кратной 0,1 м (например, 19,2 м, 26 м, 31,9 м и т. п.).

Решение. Пусть в прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Разместим прожекторы на потолке над точками, являющимися серединами отрезков AO, BO, CO и DO, на высоте, равной четверти диагонали прямоугольника. Тогда первый прожектор будет полностью освещать круг, внутри которого находится прямоугольник с диагональю AO), второй прожектор будет освещать прямоугольник с диагональю BO и так далее. В итоге всё поле будет освещено. В этом случае высота потолка равна $\frac{\sqrt{90^2+60^2}}{4} = \frac{5}{2}\sqrt{117} = \frac{15}{2}\sqrt{13}$ м.

Необходимо доказать, что более «выгодного» расположения нет. Для этого применяем принцип Дирихле. Если взять 5 точек на поле: точки A, B, C, D и O (важно, что расстояние между любыми двумя из этих точек не меньше, чем половина диагонали прямоугольника), и предположить, что диаметр круга меньше, чем половина диагонали, то один прожектор осветит не больше, чем одну из этих четырех точек. Значит, хотя бы одна из этих 5 точек окажется неосвещенной. Осталось оценить сверху величину $\frac{15}{2}\sqrt{13}$. Так как $\frac{15}{2}\sqrt{13} = \sqrt{731,25}$, а $27^2 < 729 < 731,25 < 734,41 = 27,1^2$, то высота потолка должна быть равна 27,1 м.

Ответ. 27,1 м.

2.2.2.

Проектируется крытое футбольное поле прямоугольной формы длиной 100 м, шириной 70 м, которое должно освещаться четырьмя прожекторами, каждый из которых висит в какой-то точке на потолке. При этом каждый прожектор освещает круг, радиус которого равен высоте, на которой висит прожектор. Необходимо найти минимально возможную высоту потолка, при которой выполняются следующие условия: каждая точка футбольного поля освещается хотя бы одним прожектором; высота потолка должна быть кратной 0,1 м (например, 19,2 м, 26 м, 31,9 м и т. п.).

Ответ. 30,6 м.

2.2.3.

Проектируется крытое футбольное поле прямоугольной формы длиной 100 м, шириной 80 м, которое должно освещаться четырьмя прожекторами, каждый из которых висит в какой-то точке на потолке. При этом каждый прожектор освещает круг, радиус которого равен высоте, на которой висит прожектор. Необходимо найти минимально возможную высоту потолка, при которой выполняются следующие условия: каждая точка футбольного поля освещается хотя бы одним прожектором; высота потолка должна быть кратной 0,1 м (например, 19,2 м, 28 м, 33,9 м и т. п.).

Ответ. 32,1 м.

2.2.4.

Проектируется крытое футбольное поле прямоугольной формы длиной 90 м, шириной 70 м, которое должно освещаться четырьмя прожекторами, каждый из которых висит в какой-то точке на потолке. При этом каждый прожектор освещает круг, радиус которого равен высоте, на которой висит прожектор. Необходимо найти минимально возможную высоту потолка, при которой выполняются следующие условия: каждая точка футбольного поля освещается хотя бы одним прожектором; высота потолка должна быть кратной 0,1 м (например, 19,2 м, 26 м, 31,9 м и т. п.).

Ответ. 28,6 м.

3.3.1 Гаврила сел в электричку с полностью заряженным смартфоном, и ровно к концу поездки его смартфон полностью разрядился. При этом половину всего времени он играл в Тетрис, а вторую половину смотрел мультики. Известно, что смартфон полностью разряжается за 3 часа просмотра видео или за 5 часов игры в Тетрис. Какое расстояние проехал Гаврила, если электричка половину пути двигалась со средней скоростью 80 км/ч, вторую половину пути — со средней скоростью 60 км/ч? Ответ дайте в километрах, при необходимости округлив до ближайшего целого числа.

Ответ: 257 км.

Решение. Примем «емкость» батареи смартфона за 1 условную единицу (у. е.). Тогда скорость разрядки смартфона при просмотре видео равна $\frac{1}{3}$ у. е./час, скорость разрядки при игре равна $\frac{1}{5}$ у.е./час.

Если все время движения обозначить за t часов, то получаем уравнение $\frac{1}{3} \cdot \frac{t}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{t}{2}$, откуда $\frac{(5+3)t}{2 \cdot 3 \cdot 5} = 1$, то есть $t = \frac{15}{4}$ часа.

Тогда получается (здесь S – длина пути): $\frac{S}{2 \cdot 80} + \frac{S}{2 \cdot 60}$, то есть $\frac{S}{40} + \frac{S}{30} = 15$,

$S = 15 \cdot \frac{40 \cdot 3}{4+3} = \frac{1800}{7} \approx 257$ км.

3.3.2 Гаврила сел в электричку с полностью заряженным смартфоном, и ровно к концу поездки его смартфон полностью разрядился. При этом половину всего времени он играл в Тетрис, а вторую половину смотрел мультики. Известно, что смартфон полностью разряжается за 3 часа просмотра видео или за 5 часов игры в Тетрис. Какое расстояние проехал Гаврила, если электричка половину пути двигалась со средней скоростью 100 км/ч, вторую половину пути — со средней скоростью 60 км/ч? Ответ дайте в километрах, при необходимости округлив до ближайшего целого числа.

Ответ: 281 км.

4.2.1 В качестве рабочего вещества тепловой машины, работающей циклически, используют идеальный газ. Цикл состоит из трех этапов: изохорическое уменьшение давления с $3P_0$ до P_0, изобарическое увеличение плотности с ρ_0 до $3\rho_0$ и возвращение в исходное состояние, при котором процесс в осях $P/P_0, \rho/\rho_0$ изображается четвертью окружности с центром в точке (1,1). Определите КПД этого цикла, зная, что он в 8 раз меньше максимально возможного при тех же значениях минимальной и максимальной температур газа, что и в данном цикле.

Решение. Перерисуем цикл в pv диаграмме. Там линия сначала идет вниз, потом налево, после чего замыкается по некоторой кривой. Так как давление во всех точках не превосходит nP_0, а объем $V_0 = m/\rho_0$, m – масса газа, максимальная температура равна $T_1 = nP_0V_0/R$. Аналогично минимальная температура газа $T_3 = P_0V_0/(nR)$. Наибольший КПД при таком диапазоне температур $1 - T_2/T_1$, следовательно, КПД рассматриваемого цикла $(1/\alpha) \cdot (1 - 1/n^2)$.

Ответ. $1/9$

4.2.2 В качестве рабочего вещества тепловой машины, работающей циклически, используют идеальный газ. Цикл состоит из трех этапов: изохорическое уменьшение давления с $4P_0$ до P_0, изобарическое увеличение плотности с ρ_0 до $4\rho_0$ и возвращение в исходное состояние, при котором процесс в осях $P/P_0, \rho/\rho_0$ изображается четвертью окружности с центром в точке (4,4). Определите КПД этого цикла, зная, что он в 15 раз меньше максимально возможного при тех же значениях минимальной и максимальной температур газа, что и в данном цикле.

Ответ. $1/16$

4.2.3 В качестве рабочего вещества тепловой машины, работающей циклически, используют идеальный газ. Цикл состоит из трех этапов: изохорическое уменьшение давления с $2P_0$ до P_0, изобарическое увеличение плотности с ρ_0 до $2\rho_0$ и возвращение в исходное состояние, при котором процесс в осях $P/P_0, \rho/\rho_0$ изображается четвертью окружности с центром в точке (1,1). Определите КПД этого цикла, зная, что он в 3 раза меньше максимально возможного при тех же значениях минимальной и максимальной температур газа, что и в данном цикле.

Ответ. $1/4$

4.2.4 В качестве рабочего вещества тепловой машины, работающей циклически, используют идеальный газ. Цикл состоит из трех этапов: изохорическое уменьшение давления с $5P_0$ до P_0, изобарическое увеличение плотности с ρ_0 до $5\rho_0$ и возвращение в исходное состояние, при котором процесс в осях $P/P_0, \rho/\rho_0$ изображается четвертью окружности с центром в точке (5,5). Определите КПД этого цикла, зная, что он в 8 раз меньше максимально возможного при тех же значениях минимальной и максимальной температур газа, что и в данном цикле.

Ответ. $3/25$

5.1.1. Частица движется в плоскости Oxy прямоугольной системы координат по закону (здесь x, y — координаты точки в метрах, t – время в секундах):

$$x(t) = 3 + \sin t \cdot \cos t - \sin t - \cos t; \; y(t) = 1$$

В этой же плоскости из начала координат постоянно исходит луч света по закону $y = cx$, где c — положительная безразмерная константа. При каких значениях c существует хотя бы один момент времени, в который данная частица освещается лучом?

Решение.

Сделаем замену переменных $z = \sin t + \cos t$. Тогда $z^2 = 1 + 2\sin t \cos t$, и зависимость x от t принимает вид

$$x(t) = 3 + \frac{z^2-1}{2} - z, \; z = \sin t + \cos t, \; |z| \leqslant \sqrt{2}$$

Функция $f(z) = 3 + \dfrac{z^2-1}{2} - z = \dfrac{z^2}{2} - z + \dfrac{5}{2} = \dfrac{1}{2}(z-1)^2 + 2$ — парабола с вершиной $z_0 = 1$, имеющая минимум в этой вершине, равный 2.

Так как $|z| \leqslant \sqrt{2}$, то минимальное значение функции будет в вершине, в максимальное — при $z = -\sqrt{2}$. Получим, что область значений этой функции есть отрезок $\left[2; \dfrac{7}{2} + \sqrt{2}\right]$.

Таким образом, частица в разные моменты времени пробегает все точки отрезка AB, где $A(2;\, 1)$, $B(\dfrac{7}{2} + \sqrt{2};\, 1)$.

Данный в условии луч проходит через точку A при $c = \dfrac{1}{2}$, а через точку B при

$c = \dfrac{1}{\frac{7}{2} + \sqrt{2}} = \dfrac{2}{7 + 2\sqrt{2}} = \dfrac{2\left(7 - 2\sqrt{2}\right)}{41}$.

При всех промежуточных значениях c найдутся моменты времени, когда луч освещает частицу. Таким образом, .

Ответ: $c \in \left[\dfrac{2\left(7 - 2\sqrt{2}\right)}{41}; \dfrac{1}{2}\right]$

5.1.2. Частица движется в плоскости Oxy прямоугольной системы координат по закону (здесь x, y — координаты точки в метрах, t – время в секундах):

$$x(t) = 3; \; y(t) = 3 + \sin t \cdot \cos t - \sin t - \cos t$$

В этой же плоскости из начала координат постоянно исходит луч света по закону $y = cx$, где c — положительная безразмерная константа. При каких значениях c не существует ни одного момента времени, в который данная частица освещается лучом?

Ответ: $c \in \left(0;\, \frac{3}{2}\right), \left(\dfrac{7 + 2\sqrt{2}}{6}; \infty\right)$

6.2.1. На вертикально расположенную конструкцию, состоящую из двух одинаковых масс, соединенных пружиной (см. рисунок), производят воздействие, в результате которого верхняя масса начинает двигаться с начальной скоростью V_1 под углом β к горизонту, а нижняя — со скоростью V_2 под углом α к горизонту. На какую максимальную высоту относительно своего начального положения поднимется точка A — центр пружины?

Решение.

Тезис 1. Центр масс будет все время находится в точке A. Пусть радиусы-векторы точек с массами $r_1(x_1;\, y_1)$, $r_2(x_2;\, y_2)$. Тогда радиус-вектор центра масс определяится из соотношения:

$r_c = \dfrac{mr_1 + mr_2}{m+m} = \dfrac{r_1 + r_2}{2}(1)$

То есть, центр масс всегда будет находиться в точке A.

Тезис 2. Второй закон Ньютона для движения центра масс (действуют только внешние силы относительно системы двух тел на пружине):

$2m\bar{a} = 2m\bar{g} \Rightarrow \bar{a} = \bar{g}$

Движение центра масс равноускоренное: $\bar{r}_c(t) = \bar{r}_{c0} + \bar{V}_{c0}t + \dfrac{\bar{g}t^2}{2}$

Тезис 3. Начальная скорость определится из (1):

$\bar{V}_{c0} = \dot{r}_{c0} = \dfrac{V_{10} + V_{20}}{2}$

Тезис 4. Найдем перемещение центра масс в проекции на вертикальное направление y:

$y_c - y_{c0} = V_{c0}t + gt^2/2,$

где $V_{c0} = (V_1 \sin\beta + V_2 \sin\alpha)/2.$

Тогда мы ищем максимальное значение функции

$F(t) = t(V_1 \sin\beta + V_2 \sin\alpha)/2 + gt^2/2,$

которое равно $F_{max} = \dfrac{1}{2g}\left(\dfrac{V_1 \sin\beta + V_2 \sin\alpha}{2}\right)^2$

Ответ: $\dfrac{1}{2g}\left(\dfrac{V_1 \sin\beta + V_2 \sin\alpha}{2}\right)^2$

6.2.2. $\dfrac{1}{2g}\left(\dfrac{V_1 \sin\beta + V_2 \sin\alpha}{2}\right)^2$

6.2.3. $\dfrac{1}{2g}\left(\dfrac{V_1 \sin\beta + V_2 \sin\alpha}{2}\right)^2$

6.2.4. $\dfrac{1}{2g}\left(\dfrac{V_1 \sin\beta + V_2 \sin\alpha}{2}\right)^2$

Олимпиада «ЛОМОНОСОВ» по механике и математическому моделированию – 2021/2022

10 – 11 классы

Задачи 1 – 4 оцениваются в **15 баллов** каждая, задачи 5-6 – в **20 баллов** каждая. Максимальный балл (соответственно 15 или 20 баллов) ставится за правильное и полное решение задачи и правильный ответ.

За решения с различными недочетами (недостатки обоснования, неточности и т. д.) ставятся оценки 5 или 10 баллов.

Максимальная сумма – 100 баллов.

Критерии оценок задач:

Задача 1. 15 баллов: правильное решение и правильный ответ;

5 баллов: идейно правильное решение, вычислительные ошибки.

Задача 2. 15 баллов: правильное решение и правильный ответ;

10 баллов: в оценке высоты потолка используются необоснованные или неправильные выводы;

10 баллов: не доказано, что высота не может быть меньше данной (с помощью принципа Дирихле или других рассуждений);

5 баллов: наличие обоих приведенных выше недочётов (даже при правильном ответе).

Задача 3. 15 баллов: правильное решение и правильный ответ;

10 баллов: правильный ответ, ошибка в округлении;

5 баллов: при идейно правильном решении допущены вычислительные ошибки.

Задача 4. 15 баллов: правильное решение и правильный ответ;

5 баллов: имеются разумные соображения, но решение не доведено до конца.

Задача 5. 20 баллов: правильное решение и правильный ответ;

10 баллов: решение правильное, ответ неверный из-за вычислительных ошибок;

5 баллов: имеются разумные соображения, но решение не доведено до конца.

Задача 6. 20 баллов: правильное решение и правильный ответ;

10 баллов: идейно верное решение, но ответ неверен из-за вычислительных ошибок.