Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2021/22 учебного года для 11 классов

Задача 1 (10 баллов)

B-1 В выражении

$$A = 81^{0.5*\log_9 7}$$

на месте знака $*$ может стоять любой из знаков четырёх арифметических действий $(+, -, :, \times)$. Найдите отношение наибольшего возможного значения A к наименьшему, при необходимости округлив ответ до сотых.

B-2 В выражении

$$A = 36^{0.5*\log_6 7}$$

на месте знака $*$ может стоять любой из знаков четырёх арифметических действий $(+, -, :, \times)$. Найдите отношение наибольшего возможного значения A к наименьшему, при необходимости округлив ответ до сотых.

B-3 В выражении

$$A = 81^{0.5*\log_9 6}$$

на месте знака $*$ может стоять любой из знаков четырёх арифметических действий $(+, -, :, \times)$. Найдите отношение наибольшего возможного значения A к наименьшему, при необходимости округлив ответ до сотых.

B-4 4. В выражении

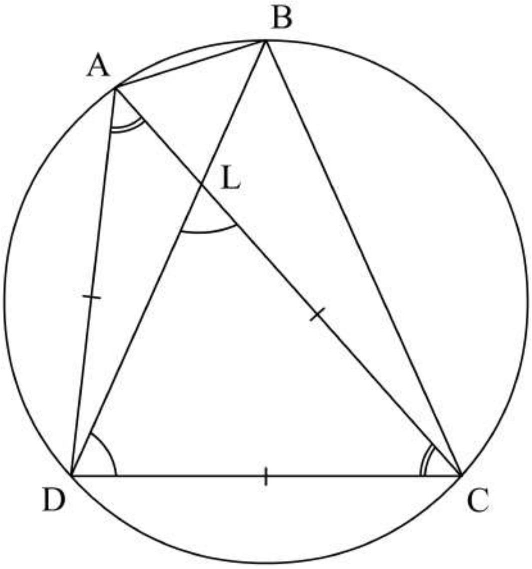
$$A = 49^{0.5*\log_7 9}$$

на месте знака $*$ может стоять любой из знаков четырёх арифметических действий $(+, -, :, \times)$. Найдите отношение наибольшего возможного значения A к наименьшему, при необходимости округлив ответ до сотых.

Задача 2 (10 баллов)

Условие в общем виде

Точки A, B, C и D расположены в указанном порядке на окружности таким образом, что длины дуг AD и CD равны a, отношение длин дуг AB и BC равно k, а также равны длины отрезков AD и CL, где L — точка пересечения отрезков AC и BD. Найдите длину дуги AB (BC).



В-1 Точки A, B, C и D расположены в указанном порядке на окружности таким образом, что длины дуг AD и CD равны 4, отношение длин дуг AB и BC равно 3/7, а также равны длины отрезков AD и CL, где L – точка пересечения отрезков AC и BD. Найдите длину дуги AB.

В-2 Точки A, B, C и D расположены в указанном порядке на окружности таким образом, что длины дуг AD и CD равны 5, отношение длин дуг AB и BC равно 2/7, а также равны длины отрезков AD и CL, где L – точка пересечения отрезков AC и BD. Найдите длину дуги BC.

В-3 Точки A, B, C и D расположены в указанном порядке на окружности таким образом, что длины дуг AD и CD равны 4, отношение длин дуг AB и BC равно 5/9, а также равны длины отрезков AD и CL, где L – точка пересечения отрезков AC и BD. Найдите длину дуги AB.

В-4 Точки A, B, C и D расположены в указанном порядке на окружности таким образом, что длины дуг AD и CD равны 1, отношение длин дуг AB и BC равно 8/9, а также равны длины отрезков AD и CL, где L – точка пересечения отрезков AC и BD. Найдите длину дуги BC.

Задача 3 (10 баллов)

В-1 Монета искривлена так, что вероятность выпадения ровно 3-х орлов в серии из 5-ти бросков равна вероятности выпадения ровно 2-х орлов в серии из 4-х бросков. Найдите вероятность того, что в серии из 6-ти бросков выпадет не менее 3-х орлов. Если необходимо, ответ округлите до сотых.

В-2 Монета искривлена так, что вероятность выпадения ровно 3-х орлов в серии из 5-ти бросков равна вероятности выпадения ровно 2-х орлов в серии из 4-х бросков. Найдите вероятность того, что в серии из 6-ти бросков выпадет не менее 4-х орлов. Если необходимо, округлите ответ до сотых.

В-3 Монета искривлена так, что вероятность выпадения ровно 3-х орлов в серии из 5-ти бросков равна вероятности выпадения ровно 2-х орлов в серии из 4-х бросков. Пусть вероятность того, что в серии из 6-ти бросков этой монеты выпадет не менее 3-х орлов, равна $\frac{m}{n}$ (где m и n — натуральные числа и дробь несократима). Найдите значение $m+n$.

В-4 Монета искривлена так, что вероятность выпадения ровно 3-х орлов в серии из 5-ти бросков равна вероятности выпадения ровно 2-х орлов в серии из 4-х бросков. Пусть вероятность того, что в серии из 6-ти бросков этой монеты выпадет не менее 4-х орлов, равна $\frac{m}{n}$ (где m и n — натуральные числа и дробь несократима). Найдите значение $m+n$.

В-5 Монета искривлена так, что вероятность выпадения ровно 3-х орлов в серии из 5-ти бросков равна вероятности выпадения ровно 2-х орлов в серии из 4-х бросков. Пусть вероятность того, что в серии из 6-ти бросков этой монеты выпадет не менее 3-х орлов, равна $\frac{m}{n}$ (где m и n — натуральные числа и дробь несократима). Найдите значение $m-n$.

В-6 Монета искривлена так, что вероятность выпадения ровно 3-х орлов в серии из 5-ти бросков равна вероятности выпадения ровно 2-х орлов в серии из 4-х бросков. Пусть вероятность того, что в серии из 6-ти бросков этой монеты выпадет не менее 4-х орлов, равна $\frac{m}{n}$ (где m и n — натуральные числа и дробь несократима). Найдите значение $m-n$.

В-7 Андрей наугад выбирает трёхзначное число в десятичной системе счисления. После этого он переводит это число в систему счисления по основанию 9, а потом в систему счисления по основанию 11. Найдите вероятность того, что в обоих случаях он получит тоже трёхзначное число. Ответ при необходимости округлите до сотых.

В-8 Борис наугад выбирает трёхзначное число в десятичной системе счисления. После этого он переводит это число в систему счисления по основанию 9, а потом в систему счисления по основанию 11. Найдите вероятность того, что хотя бы в одном из двух случаев он получит не трёхзначное число. Ответ при необходимости округлите до сотых.

В-9 Валентина наугад выбирает трёхзначное число в десятичной системе счисления. После этого она переводит это число в систему счисления по основанию 9, а потом в систему счисления по основанию 11. Вероятность того, что в обоих случаях она получит тоже трёхзначное число, равна $\frac{m}{n}$ (где m и n – натуральные числа и дробь несократима). Найдите значение $m+n$.

В-10 Галина наугад выбирает трёхзначное число в десятичной системе счисления. После этого она переводит это число в систему счисления по основанию 9, а потом в систему счисления по основанию 11. Вероятность того, что хотя бы в одном из двух случаев она получит не трёхзначное число, равна равна $\frac{m}{n}$ (где m и n – натуральные числа и дробь несократима). Найдите значение $m+n$.

Задача 4 (10 баллов)

В-1 Найдите максимальное значение функции $f(x) = \sin^4 x + 2\cos^3 x$ на отрезке $\left[\arccos\frac{3}{4},\ \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$. При необходимости округлите ответ до сотых.

В-2 Найдите максимальное значение функции $f(x) = \sin^4 x - 2\cos^3 x$ на отрезке $\left[\arccos\frac{1}{4},\ \arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$. При необходимости округлите ответ до сотых.

В-3 Найдите минимальное значение функции $f(x) = \cos^4 x + 2\sin^3 x$ на отрезке $\left[-\arcsin\frac{1}{4},\ \arcsin\frac{3}{4}\right]$. При необходимости округлите ответ до сотых.

В-4 Найдите минимальное значение функции $f(x) = \cos^4 x - 2\sin^3 x$ на отрезке $\left[-\arcsin\frac{3}{4},\ \arcsin\frac{1}{4}\right]$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Условие в общем виде

Решите неравенство

$$\frac{\log_a x}{\log_x c} + \log_b a \cdot \log_b c > 2\log_b x, \quad a, b, c > 1.$$

В-5 Решите неравенство

$$\frac{\log_2 x}{\log_x 7} + \log_5 2 \cdot \log_5 7 > 2\log_5 x.$$

В ответе укажите наибольшее натуральное значение n, при котором не все числа, принадлежащие отрезку $[n-1, n]$, являются решениями неравенства.

В-6 Решите неравенство

$$\frac{\log_2 x}{\log_x 5} + \log_7 2 \cdot \log_7 5 > 2 \log_7 x.$$

В ответе укажите наибольшее натуральное значение n, при котором не все числа, принадлежащие отрезку $[n-1, n]$, являются решениями неравенства.

В-7 Решите неравенство

$$\frac{\log_3 x}{\log_x 7} + \log_2 3 \cdot \log_2 7 > 2 \log_2 x.$$

В ответе укажите наибольшее натуральное значение n, при котором не все числа, принадлежащие отрезку $[n-1, n]$, являются решениями неравенства.

В-8 Решите неравенство

$$\frac{\log_3 x}{\log_x 2} + \log_7 3 \cdot \log_7 2 > 2 \log_7 x.$$

В ответе укажите наибольшее натуральное значение n, при котором не все числа, принадлежащие отрезку $[n-1, n]$, являются решениями неравенства.

В-9 Решите неравенство

$$\frac{\log_7 x}{\log_x 3} + \log_2 7 \cdot \log_2 3 > 2 \log_2 x.$$

В ответе укажите наибольшее натуральное значение n, при котором не все числа, принадлежащие отрезку $[n-1, n]$, являются решениями неравенства.

В-10 Решите неравенство

$$\frac{\log_7 x}{\log_x 2} + \log_3 7 \cdot \log_3 2 > 2 \log_3 x.$$

В ответе укажите наибольшее натуральное значение n, при котором не все числа, принадлежащие отрезку $[n-1, n]$, являются решениями неравенства.

Задача 5 (10 баллов)

В-1 Найдите площадь полной поверхности куба, если расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней этого куба равно 8.

В-2 Найдите объём куба, если расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней этого куба равно $4\sqrt{3}$.

В-3 Найдите площадь полной поверхности куба, если расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней этого куба равно 7.

Ответ: 882

В-4 Найдите объём куба, если расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней этого куба равно $5\sqrt{3}$.

В-5 Найдите площадь полной поверхности куба, если расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней этого куба равно 9.

В-6 Найдите объём куба, если расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней этого куба равно $6\sqrt{3}$.

В-7 Площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ равна 2, а площадь основания — $\sqrt{3}$. Найдите все точки пирамиды, удаленные на максимально возможное расстояние от плоскости боковой грани SAB. В ответе укажите это расстояние, при необходимости округлив его значение до двух знаков после запятой.

В-8 Площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ равна 9, а площадь основания — $4\sqrt{3}$. Найдите все точки пирамиды, удаленные на максимально возможное расстояние от плоскости боковой грани SDE. В ответе укажите это расстояние, при необходимости округлив его значение до двух знаков после запятой.

В-9 Площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ равна 8, а площадь основания — $2\sqrt{3}$. Найдите все точки пирамиды, удаленные на максимально возможное расстояние от плоскости боковой грани SCD. В ответе укажите это расстояние, при необходимости округлив его значение до двух знаков после запятой.

В-10 Площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ равна 9, а площадь основания — $3\sqrt{3}$. Найдите все точки пирамиды, удаленные на максимально возможное расстояние от плоскости боковой грани SEF. В ответе укажите это расстояние, при необходимости округлив его значение до двух знаков после запятой.

Задача 6 (10 баллов)

В-1 Фабрика производит $n > 15\,000$ ёлочных игрушек в месяц и является убыточной. Известно, что при изготовлении n ёлочных игрушек в месяц расходы фабрики на производство одной игрушки составляют не менее $\frac{126\,000}{n}+9-\left|3-\frac{54\,000}{n}\right|$ рублей, а цена реализации каждой игрушки при этом не превосходит $18-\frac{1}{4000}n$ рублей. Определите ежемесячный объём производства, при котором ежемесячные убытки могут быть снижены до наименьшего из возможных в данных условиях уровня. Вариант полной остановки производства исключён.

В-2 Фабрика производит $n > 400$ искусственных елей в месяц, и производство является прибыльным. Известно, что при изготовлении n искусственных елей в месяц расходы предприятия на изготовление одной ели составляют не менее $\frac{40\,500}{n}+270-\left|90-\frac{40\,500}{n}\right|$ рублей, а цена реализации каждой ели при этом не превосходит $540-\frac{3}{10}n$ рублей. Определите ежемесячный объём производства, при котором может быть получена наибольшая из возможных в данных условиях прибыль.

В-3 Фабрика производит $n < 20\,000$ ёлочных игрушек в месяц и является убыточной. Известно, что при изготовлении n ёлочных игрушек в месяц расходы предприятия на изготовление одной игрушки составляют не менее $\frac{126\,000}{n}+9-\left|3-\frac{54\,000}{n}\right|$ рублей, а цена реализации каждой игрушки при этом не превосходит $18-\frac{1}{4000}n$ рублей. Определите ежемесячный объём производства, при котором ежемесячные убытки могут быть снижены до наименьшего из возможных в данных условиях уровня. Вариант полной остановки производства исключён.

В-4 Фабрика производит $n < 500$ искусственных елей в месяц, и производство является прибыльным. Известно, что при изготовлении n искусственных елей в месяц расходы фабрики на изготовление одной ели составляют не менее $\frac{40\,500}{n}+270-\left|90-\frac{40\,500}{n}\right|$ рублей, а цена реализации каждой ели при этом не превосходит $540-\frac{3}{10}n$ рублей. Определите ежемесячный объём производства, при котором может быть получена наибольшая из возможных в данных условиях прибыль.

B-5 Завод производит $n > 300$ автомобилей в месяц. Издержки зависят от объема производства как $\lg \dfrac{n^2 - 20000}{n - 300}$. Сколько автомобилей в месяц должен выпускать завод, чтобы издержки были минимальными?

B-6 Завод производит $n > 400$ катеров в месяц. Издержки зависят от объема производства как $\lg \dfrac{n^2 - 50000}{n - 400}$. Сколько катеров в месяц должен выпускать завод, чтобы издержки были минимальными?

B-7 Завод производит $n > 500$ телевизоров в месяц. Издержки зависят от объема производства как $\lg \dfrac{n^2 - 80000}{n - 500}$. Сколько телевизоров в месяц должен выпускать завод, чтобы издержки были минимальными?

B-8 Завод производит $n > 600$ стиральных машин в месяц. Издержки зависят от объема производства как $\lg \dfrac{n^2 - 50000}{n - 600}$. Сколько стиральных машин в месяц должен выпускать завод, чтобы издержки были минимальными?

Задача 7 (10 баллов)

В-1 Найдите сумму всех целых a, при которых неравенство

$$(2-a)4^{\cos 2x} + 2(a-5)\frac{1}{4^{\sin^2 x}} + 1 < 0$$

выполнено для всех значений x.

В-2 Найдите сумму всех целых значений a, при которых неравенство

$$(2+a)4^{\cos 2x} - 2(a+5)\frac{1}{4^{\sin^2 x}} < -1$$

выполнено для всех значений x.

В-3 Найдите сумму всех целых значений a, при которых неравенство

$$(1-a)4^{\cos 2x} + 2(a-4)4^{-\sin^2 x} < -1$$

выполнено для всех значений x.

В-4 Найдите сумму всех целых значений a, при которых неравенство

$$(1+a)4^{\cos 2x} - 2(a+4)4^{-\sin^2 x} + 1 < 0$$

выполнено для всех значений x.

Задача 8 (10 баллов)

В-1 В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса $\angle BAD$, пересекающая прямую BC в точке K. В треугольник ABK вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания этой окружностью сторон AB и BK, если $AB = 4$, $\angle BAD = \dfrac{\pi}{3}$. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

В-2 В параллелограмме $KLMN$ проведена биссектриса $\angle LKN$, пересекающая прямую LM в точке P. В треугольник KLP вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания этой окружностью сторон KL и LP, если $KL = 4\sqrt{5}$, $\angle MNK = \dfrac{2\pi}{3}$. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

В-3 В параллелограмме $FEGH$ проведена биссектриса $\angle EFH$, пересекающая прямую EG в точке A. В треугольник FEA вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания этой окружностью сторон FE и EA, если $FE = 12\sqrt{7}$, $\angle HFE = \dfrac{\pi}{3}$. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

В-4 В параллелограмме $PQRS$ проведена биссектриса $\angle QPS$, пересекающая прямую QR в точке H. В треугольник PQH вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания этой окружностью сторон PQ и QH, если $PQ = 2\sqrt{3}$, $\angle RSP = \dfrac{2\pi}{3}$. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Задача 9 (10 баллов)

В-1 Решите систему

$$\begin{cases} 6^{y+1}\cdot 5^{|2+x-x^2|+1+\log_5 6}=5, \\ 3\sqrt{2-y}\leq 6-|y+2|. \end{cases}$$

В ответе укажите минимальное значение, которое может принимать сумма $x+y$, если x и y являются решениями системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

В-2 Решите систему

$$\begin{cases} 3^{y+3}\cdot 2^{|2+3x+x^2|-\log_2 3}=3, \\ 3\sqrt{3-y}\leq 6-|y+1|. \end{cases}$$

В ответе укажите максимальное значение, которое может принимать сумма $x+y$, если x и y являются решениями системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

В-3 Решите систему

$$\begin{cases} 2^{5-y}\cdot 3^{|5x-x^2-6|-\log_3 2}=2, \\ 3\sqrt{y+1}\leq 6-|3-y|. \end{cases}$$

В ответе укажите минимальное значение, которое может принимать сумма $x+y$, если x и y являются решениями системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

В-4 Решите систему

$$\begin{cases} 5^{4-y}\cdot 7^{|3x-2-x^2|+1+\log_7 5}=7, \\ 3\sqrt{y-1}\leq 6-|5-y|. \end{cases}$$

В ответе укажите максимальное значение, которое может принимать сумма $x+y$, если x и y являются решениями системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Задача 10 (10 баллов)

В-0 Пусть $\hat{x}$ — наибольший корень многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Найти остаток от деления целой части числа $\hat{x}^{2021}$ на 17. Целая часть числа a — это наибольшее целое число, не превосходящее числа a.

В-1 Пусть $\hat{x}$ — наибольший корень многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Найти остаток от деления целой части числа $\hat{x}^{2026}$ на 17. Целая часть числа a — это наибольшее целое число, не превосходящее числа a.

В-2 Пусть $\hat{x}$ — наибольший корень многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Найти остаток от деления целой части числа $\hat{x}^{2027}$ на 17. Целая часть числа a — это наибольшее целое число, не превосходящее числа a.

В-3 Пусть $\hat{x}$ — наибольший корень многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Найти остаток от деления целой части числа $\hat{x}^{2028}$ на 17. Целая часть числа a — это наибольшее целое число, не превосходящее числа a.

В-4 Пусть $\hat{x}$ — наибольший корень многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Найти остаток от деления целой части числа $\hat{x}^{2029}$ на 17. Целая часть числа a — это наибольшее целое число, не превосходящее числа a.

В-5 Пусть $\hat{x}$ — наибольший корень многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Найти остаток от деления целой части числа $\hat{x}^{2030}$ на 17. Целая часть числа a — это наибольшее целое число, не превосходящее числа a.

B-6 Найдите сумму всех корней уравнения

$$8\cos^3 x + 1 = 2\sqrt[3]{4\cos x - 1},$$

принадлежащих отрезку $[0; \pi]$. При необходимости округлите ответ до сотых.

B-7 Найдите сумму всех корней уравнения

$$8\sin^3 x - 1 = 2\sqrt[3]{4\sin x + 1},$$

принадлежащих отрезку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. При необходимости округлите ответ до сотых.

B-8 Найдите сумму всех корней уравнения

$$8\cos^3 x - 1 = 2\sqrt[3]{4\cos x + 1},$$

принадлежащих отрезку $[0; \pi]$. При необходимости округлите ответ до сотых.

B-9 Найдите сумму всех корней уравнения

$$8\sin^3 x + 1 = 2\sqrt[3]{4\sin x - 1},$$

принадлежащих отрезку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. При необходимости округлите ответ до сотых.
