Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2021/22 учебного года для 11 класса

Задача 1. Какое из чисел больше:

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} \text{ или } B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{117}{(58\cdot 59)^2} + \frac{119}{(59\cdot 60)^2}?$$

Задача 2. Загадано 2022-значное натуральное число, любые две соседние цифры которого (расположенные в том же порядке) образуют двузначное число, делящееся или на 19, или на 23. Загаданное число начинается с цифры 4. Какой цифрой оно заканчивается?

Задача 3. Дана функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}.$$

Вычислите

$$f(f(f(f(f(...f(2022))))...)),$$

где функция f применяется 1304 раза.

Задача 4. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 60°. Снаружи этого конуса расположены 17 шаров радиуса 2, каждый из которых касается двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса.

Задача 5. Если действительные числа a, b, c упорядочить по нестрогому возрастанию, получив тройку $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$, то число x_2 будем называться средним из чисел a, b, c. Найдите все значения t, при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a = t^3 - 144t; \quad b = 2^t - 256; \quad c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

положительно.

Задача 6. При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ наибольшее расстояние между корнями (не обязательно соседними) уравнения

$$a \operatorname{ctg}^3 x + (2a^2 - a - 2)\operatorname{ctg}^2 x + (2 - 4a - 2a^2)\operatorname{ctg} x + 4a = 0,$$

принадлежащими интервалу $(0; \pi)$, принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение.

Задача 7. Высота AM остроугольного треугольника ABC пересекается с его другими высотами в точке O. Точка K лежит на отрезке BC так, что величина угла AKO максимальна. Найдите MK, если $BM = 5$, $MC = 3$.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2021/22 учебного года для 11 класса

Задача 1. Какое из чисел больше:

$$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{87}{(43\cdot 44)^2} + \frac{89}{(44\cdot 45)^2} \text{ или } B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}?$$

Задача 2. Загадано 2021-значное натуральное число, любые две соседние цифры которого (расположенные в том же порядке) образуют двузначное число, делящееся или на 19, или на 23. Загаданное число начинается с цифры 1. Какой цифрой оно заканчивается?

Задача 3. Дана функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}.$$

Вычислите

$$f(f(f(f(f(...f(2022))))...)),$$

где функция f применяется 1305 раз.

Задача 4. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 60°. Внутри этого конуса расположены 19 шаров радиуса 3, каждый из которых касается двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса.

Задача 5. Если действительные числа a, b, c упорядочить по нестрогому возрастанию, получив тройку $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$, то число x_2 будем называться средним из чисел a, b, c. Найдите все значения t, при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a = t^3 - 121t; \quad b = 2^t - 32; \quad c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

положительно.

Задача 6. При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ наибольшее расстояние между корнями (не обязательно соседними) уравнения

$$a \operatorname{tg}^3 x + (1 - a - 2a^2)\operatorname{tg}^2 x + (2a^2 - 2a - 1)\operatorname{tg} x + 2a = 0,$$

принадлежащими интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение.

Задача 7. Высота BF остроугольного треугольника ABC пересекается с его другими высотами в точке P. Точка N лежит на отрезке AC так, что величина угла BNP максимальна. Найдите FN, если $AF = 7$, $FC = 2$.

Задача 1. Какое из чисел больше:

$$A=\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} \text{ или } B=\frac{3}{(1\cdot 2)^2}+\frac{5}{(2\cdot 3)^2}+\ldots+\frac{77}{(38\cdot 39)^2}+\frac{79}{(39\cdot 40)^2}?$$

Задача 2. Загадано 2021-значное натуральное число, любые две соседние цифры которого (расположенные в том же порядке) образуют двузначное число, делящееся или на 19, или на 23. Загаданное число начинается с цифры 4. Какой цифрой оно заканчивается?

Задача 3. Дана функция

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[11]{1-x^{11}}}.$$

Вычислите

$$f(f(f(f(f(\ldots f(2022))))\ldots)),$$

где функция f применяется 1306 раз.

Задача 4. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 60°. Снаружи этого конуса расположены 17 шаров радиуса 2, каждый из которых касается двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса.

Задача 5. Если действительные числа a, b, c упорядочить по нестрогому возрастанию, получив тройку $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$, то число x_2 будем называться средним из чисел a, b, c. Найдите все значения t, при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a=t^3-81t; \quad b=11^t-121; \quad c=\sin t-\frac{1}{2}$$

положительно.

Задача 6. При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ наибольшее расстояние между корнями уравнения (не обязательно соседними)

$$a\operatorname{tg}^3 x+(2-a-a^2)\operatorname{tg}^2 x+(a^2-2a-2)\operatorname{tg} x+2a=0,$$

принадлежащими интервалу $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение.

Задача 7. Высота AM остроугольного треугольника ABC пересекается с его другими высотами в точке O. Точка K лежит на отрезке BC так, что величина угла AKO максимальна. Найдите MK, если $BM=5$, $MC=3$.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2021/22 учебного года для 11 класса

Задача 1. Какое из чисел больше:

$$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{97}{(48\cdot 49)^2} + \frac{99}{(49\cdot 50)^2} \text{ или } B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}?$$

Задача 2. Загадано 2022-значное натуральное число, любые две соседние цифры которого (расположенные в том же порядке) образуют двузначное число, делящееся или на 19, или на 23. Загаданное число начинается с цифры 9. Какой цифрой оно заканчивается?

Задача 3. Дана функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}.$$

Вычислите

$$f(f(f(f(f(...f(2022))))...)),$$

где функция f применяется 1305 раз.

Задача 4. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 60°. Внутри этого конуса расположены 13 шаров радиуса 2, каждый из которых касается двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса.

Задача 5. Если действительные числа a, b, c упорядочить по нестрогому возрастанию, получив тройку $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$, то число x_2 будем называться средним из чисел a, b, c. Найдите все значения t, при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a = t^3 - 100t; \quad b = 2^t - 16; \quad c = \sin t - \frac{1}{2}$$

положительно.

Задача 6. При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ наибольшее расстояние между корнями (не обязательно соседними) уравнения

$$a \operatorname{tg}^3 x + (1 - a - 2a^2) \operatorname{tg}^2 x + (2a^2 - 2a - 1) \operatorname{tg} x + 2a = 0,$$

принадлежащими интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение.

Задача 7. Высота CL остроугольного треугольника ABC пересекается с его другими высотами в точке Q. Точка S лежит на отрезке AB так, что величина угла CSQ максимальна. Найдите LS, если $AL = 2$, $LB = 5$.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2021/22 учебного года для 11 класса

Задача 1. Какое из чисел больше:

$$A=\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}\text{ или }B=\frac{3}{(1\cdot 2)^2}+\frac{5}{(2\cdot 3)^2}+\ldots+\frac{117}{(58\cdot 59)^2}+\frac{119}{(59\cdot 60)^2}?$$

Задача 2. Загадано 2021-значное натуральное число, любые две соседние цифры которого (расположенные в том же порядке) образуют двузначное число, делящееся или на 19, или на 23. Загаданное число начинается с цифры 4. Какой цифрой оно заканчивается?

Задача 3. Дана функция

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}.$$

Вычислите

$$f(f(f(f(f(\ldots f(2022))))\ldots)),$$

где функция f применяется 1304 раза.

Задача 4. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 60°. Снаружи этого конуса расположены 11 шаров радиуса 3, каждый из которых касается двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса.

Задача 5. Если действительные числа a, b, c упорядочить по нестрогому возрастанию, получив тройку $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$, то число x_2 будем называться средним из чисел a, b, c. Найдите все значения t, при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a=t^3-81t;\quad b=11^t-121;\quad c=\sin t-\frac{1}{2}$$

положительно.

Задача 6. При каких значениях параметра $a\in\mathbb{R}$ наибольшее расстояние между корнями (не обязательно соседними) уравнения

$$a\operatorname{ctg}^3 x+(2a^2-a-2)\operatorname{ctg}^2 x+(2-4a-2a^2)\operatorname{ctg} x+4a=0,$$

принадлежащими интервалу $(0;\pi)$, принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение.

Задача 7. Высота BF остроугольного треугольника ABC пересекается с его другими высотами в точке P. Точка N лежит на отрезке AC так, что величина угла BNP максимальна. Найдите FN, если $AF=7$, $FC=2$.

Задача 1. Какое из чисел больше:

$$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{97}{(48\cdot 49)^2} + \frac{99}{(49\cdot 50)^2} \text{ или } B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}?$$

Задача 2. Загадано 2021-значное натуральное число, любые две соседние цифры которого (расположенные в том же порядке) образуют двузначное число, делящееся или на 19, или на 23. Загаданное число начинается с цифры 1. Какой цифрой оно заканчивается?

Задача 3. Дана функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}.$$

Вычислите

$$f(f(f(f(f(...f(2022))))...)),$$

где функция f применяется 1303 раза.

Задача 4. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 60°. Внутри этого конуса расположены 19 шаров радиуса 3, каждый из которых касается двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса.

Задача 5. Если действительные числа a, b, c упорядочить по нестрогому возрастанию, получив тройку $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$, то число x_2 будем называться средним из чисел a, b, c. Найдите все значения t, при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a = t^3 - 144t; \quad b = 2^t - 256; \quad c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

положительно.

Задача 6. При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ наибольшее расстояние между корнями (не обязательно соседними) уравнения

$$a\operatorname{ctg}^3 x + (a^2 - a - 3)\operatorname{ctg}^2 x + (3 - 3a - a^2)\operatorname{ctg} x + 3a = 0,$$

принадлежащими интервалу $(0; \pi)$, принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение.

Задача 7. Высота BF остроугольного треугольника ABC пересекается с его другими высотами в точке P. Точка N лежит на отрезке AC так, что величина угла BNP максимальна. Найдите FN, если $AF = 7$, $FC = 2$.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2021/22 учебного года для 11 класса

Задача 1. Какое из чисел больше:

$$A=\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} \text{ или } B=\frac{3}{(1\cdot 2)^2}+\frac{5}{(2\cdot 3)^2}+\ldots+\frac{77}{(38\cdot 39)^2}+\frac{79}{(39\cdot 40)^2}?$$

Задача 2. Загадано 2022-значное натуральное число, любые две соседние цифры которого (расположенные в том же порядке) образуют двузначное число, делящееся или на 19, или на 23. Загаданное число начинается с цифры 4. Какой цифрой оно заканчивается?

Задача 3. Дана функция

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}.$$

Вычислите

$$f(f(f(f(f(...f(2022))))...)),$$

где функция f применяется 1305 раз.

Задача 4. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 60°. Снаружи этого конуса расположены 17 шаров радиуса 2, каждый из которых касается двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса.

Задача 5. Если действительные числа a, b, c упорядочить по нестрогому возрастанию, получив тройку $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$, то число x_2 будем называться средним из чисел a, b, c. Найдите все значения t, при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a=t^3-121t; \quad b=2^t-32; \quad c=\sin t-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

положительно.

Задача 6. При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ наибольшее расстояние между корнями (не обязательно соседними) уравнения

$$a\operatorname{ctg}^3 x+(2a^2-a-2)\operatorname{ctg}^2 x+(2-4a-2a^2)\operatorname{ctg} x+4a=0,$$

принадлежащими интервалу $(0;\pi)$, принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение.

Задача 7. Высота CL остроугольного треугольника ABC пересекается с его другими высотами в точке Q. Точка S лежит на отрезке AB так, что величина угла CSQ максимальна. Найдите LS, если $AL=2$, $LB=5$.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2021/22 учебного года для 11 класса

Задача 1. Какое из чисел больше:

$$A=\frac{3}{(1\cdot 2)^2}+\frac{5}{(2\cdot 3)^2}+\ldots+\frac{87}{(43\cdot 44)^2}+\frac{89}{(44\cdot 45)^2} \text{ или } B=\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}?$$

Задача 2. Загадано 2021-значное натуральное число, любые две соседние цифры которого (расположенные в том же порядке) образуют двузначное число, делящееся или на 19, или на 23. Загаданное число начинается с цифры 1. Какой цифрой оно заканчивается?

Задача 3. Дана функция

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}.$$

Вычислите

$$f(f(f(f(f(...f(2022)))))...)),$$

где функция f применяется 1304 раза.

Задача 4. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 60°. Внутри этого конуса расположены 13 шаров радиуса 2, каждый из которых касается двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса.

Задача 5. Если действительные числа a, b, c упорядочить по нестрогому возрастанию, получив тройку $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$, то число x_2 будем называться средним из чисел a, b, c. Найдите все значения t, при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a=t^3-81t; \quad b=11^t-121; \quad c=\sin t-\frac{1}{2}$$

положительно.

Задача 6. При каких значениях параметра $a\in\mathbb{R}$ наибольшее расстояние между корнями (не обязательно соседними) уравнения

$$a\operatorname{tg}^3 x+(1-a-2a^2)\operatorname{tg}^2 x+(2a^2-2a-1)\operatorname{tg} x+2a=0,$$

принадлежащими интервалу $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение.

Задача 7. Высота AM остроугольного треугольника ABC пересекается с его другими высотами в точке O. Точка K лежит на отрезке BC так, что величина угла AKO максимальна. Найдите MK, если $BM=5$, $MC=3$.

Задача 1. Какое из чисел больше:

$$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{97}{(48\cdot 49)^2} + \frac{99}{(49\cdot 50)^2} \text{ или } B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}?$$

Задача 2. Загадано 2022-значное натуральное число, любые две соседние цифры которого (расположенные в том же порядке) образуют двузначное число, делящееся или на 19, или на 23. Загаданное число начинается с цифры 9. Какой цифрой оно заканчивается?

Задача 3. Дана функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}.$$

Вычислите

$$f(f(f(f(f(...f(2022)))) ...)),$$

где функция f применяется 1303 раза.

Задача 4. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 60°. Внутри этого конуса расположены 13 шаров радиуса 2, каждый из которых касается двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса.

Задача 5. Если действительные числа a, b, c упорядочить по нестрогому возрастанию, получив тройку $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$, то число x_2 будем называться средним из чисел a, b, c. Найдите все значения t, при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a = t^3 - 121t; \quad b = 2^t - 32; \quad c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

положительно.

Задача 6. При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ наибольшее расстояние между корнями (не обязательно соседними) уравнения

$$a\operatorname{ctg}^3 x + (a^2 - a - 3)\operatorname{ctg}^2 x + (3 - 3a - a^2)\operatorname{ctg} x + 3a = 0,$$

принадлежащими интервалу $(0;\pi)$, принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение.

Задача 7. Высота CL остроугольного треугольника ABC пересекается с его другими высотами в точке Q. Точка S лежит на отрезке AB так, что величина угла CSQ максимальна. Найдите LS, если $AL = 2$, $LB = 5$.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2021/22 учебного года для 11 класса

Задача 1. Какое из чисел больше:

$$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{87}{(43\cdot 44)^2} + \frac{89}{(44\cdot 45)^2} \text{ или } B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}?$$

Задача 2. Загадано 2022-значное натуральное число, любые две соседние цифры которого (расположенные в том же порядке) образуют двузначное число, делящееся или на 19, или на 23. Загаданное число начинается с цифры 4. Какой цифрой оно заканчивается?

Задача 3. Дана функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}.$$

Вычислите

$$f(f(f(f(f(\ldots f(2022))))\ldots)),$$

где функция f применяется 1303 раза.

Задача 4. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 60°. Снаружи этого конуса расположены 11 шаров радиуса 3, каждый из которых касается двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса.

Задача 5. Если действительные числа a, b, c упорядочить по нестрогому возрастанию, получив тройку $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$, то число x_2 будем называться средним из чисел a, b, c. Найдите все значения t, при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a = t^3 - 100t; \quad b = 2^t - 16; \quad c = \sin t - \frac{1}{2}$$

положительно.

Задача 6. При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ наибольшее расстояние между корнями уравнения (не обязательно соседними)

$$a\operatorname{tg}^3 x + (2-a-a^2)\operatorname{tg}^2 x + (a^2-2a-2)\operatorname{tg} x + 2a = 0,$$

принадлежащими интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение.

Задача 7. Высота BD остроугольного треугольника ABC пересекается с его другими высотами в точке H. Точка K лежит на отрезке AC так, что величина угла BKH максимальна. Найдите DK, если $AD = 2$, $DC = 3$.