Задача 1 (10 баллов)

В-1 Последовательность (a_n) задана рекуррентно равенствами $a_1 = 7$, $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$, $n \geqslant 2$. Найдите a_{2021}.

Ответ: 4084447.

Решение. Из условия следует, что ответ определён однозначно. Кроме того, последовательность $a_n = n^2 + 6$ удовлетворяет данному равенству. Следовательно, $a_{2021} = 2021^2 + 6 = 4084447$.

В-2 Последовательность (a_n) задана рекуррентно равенствами $a_1 = 5$, $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$, $n \geqslant 2$. Найдите a_{2022}.

Ответ: 4088488.

В-3 Последовательность (a_n) задана рекуррентно равенствами $a_1 = 4$, $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$, $n \geqslant 2$. Найдите a_{2021}.

Ответ: 4084444.

В-4 Последовательность (a_n) задана рекуррентно равенствами $a_1 = 8$, $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$, $n \geqslant 2$. Найдите a_{2022}.

Ответ: 4088491.

Задача 2 (10 баллов)

В-1 Первые 2023 натуральных чисел выписаны в ряд в некотором порядке. Вычисляют 2021 сумму стоящих подряд трех чисел из этого ряда. Какое максимальное количество из этих сумм может быть нечетным?

Ответ: 2020.

Решение. Если выписать одно четное число, потом 505 троек в порядке нечет-чет-чет, а потом 507 нечетных чисел, то нечетных сумм будет 2020. Все суммы не могут быть нечетными, поскольку числа в ряду, номера которых имеют одинаковые остатки при делении на 3, тогда имели бы одинаковую четность, а в первой тройке должно стоять либо одно нечетное число (тогда четных чисел среди первых 2023 натуральных чисел не меньше 1348), либо три нечетных, тогда все числа нечетные.

В-2 Первые 2027 натуральных чисел выписаны в ряд в некотором порядке. Вычисляют 2025 сумм стоящих подряд трех чисел из этого ряда. Какое максимальное количество из этих сумм может быть нечетным?

Ответ: 2024.

В-3 Первые 2031 натуральных чисел выписаны в ряд в некотором порядке. Вычисляют 2029 сумм стоящих подряд трех чисел из этого ряда. Какое максимальное количество из этих сумм может быть нечетным?

Ответ: 2028.

В-4 Первые 2035 натуральных чисел выписаны в ряд в некотором порядке. Вычисляют 2033 суммы стоящих подряд трех чисел из этого ряда. Какое максимальное количество из этих сумм может быть нечетным?

Ответ: 2032.

Задача 3 (10 баллов)

В-1 Найдите сумму всех целочисленных значений a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+a^2=y^2+2ax, \\ |x-10|+2|y+5|=2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: 100.

Решение. Пользуясь графическим методом, находим, что система имеет решение при $a \in [3;7] \cup [13;17]$. Сумма целочисленных значений равна $3+4+\ldots+7+13+14+\ldots+17=100$.

В-2 Найдите сумму всех целочисленных значений a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+a^2=y^2+2ax, \\ 2|x-9|+|y-4|=2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: 90. (Решения есть при $a \in [3;7] \cup [11;15]$.)

В-3 Найдите сумму всех целочисленных значений a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+2ay=y^2+a^2, \\ 2|x-9|+|y-4|=2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: 40. (Решения есть при $a \in [-7;-3] \cup [11;15]$.)

В-4 Найдите сумму всех целочисленных значений a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+2ay=y^2+a^2, \\ 2|x+4|+|y-7|=2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: 70. (Решения есть при $a \in [1;5] \cup [9;13]$.)

Задача 4 (10 баллов)

В-1 В магазине продаются синие ручки по 14 рублей, красные — по 15 рублей и зелёные — по 16 рублей. Вася купил несколько ручек всех трёх цветов, потратив на них ровно 170 рублей. Какое наименьшее число красных ручек он мог купить?

Ответ: 2.

Решение. Пусть k — число синих ручек, l — красных, m — зелёных. Тогда из условия получаем уравнение $14k + 15l + 16m = 170$, где $k, l, m > 0$. Рассматривая остаток от деления этого числа на 15, получаем равенство $m = k + 5 + 15s$, где $s \in \mathbb{Z}$. Подставим это выражение в исходное уравнение и поделим обе его части на 15, получим $2k+l+16s = 6$. Поскольку $2k+l \geqslant 3$, то $s \leqslant 0$. Если $s \leqslant -2$, то $2k+l \geqslant 6+32 = 38$ и $170 = 14k+15l+16m \geqslant 14k+7l \geqslant 7\cdot 38 > 170$ — противоречие. Следовательно, $s = 0$ или $s = -1$. При $s = 0$ с учётом условий $k, l > 0$ получаем два решения $k = 1$, $l = 4$ и $k = 2$ и $l = 2$, при этом $m = k + 5$ равно 6 и 7 соответственно. Рассмотрим случай $s = -1$. Поскольку $m = k+5-15 = k-10 \geqslant 0$, т. е. $2k \geqslant 20$, получаем $k = 10$ и $l = 2$, но при этом $m = 0$, поэтому данный случай невозможен. Таким образом, возможны лишь 2 случая: $k = 1, l = 4, m = 6$ или $k = 2, l = 2, m = 7$. Наименьшее возможное значение l равно 2.

В-2 В магазине продаются синие ручки по 14 рублей, красные — по 15 рублей и зелёные — по 16 рублей. Вася купил несколько ручек всех трёх цветов, потратив на них ровно 170 рублей. Какое наибольшее число красных ручек он мог купить?

Ответ: 4.

В-3 В магазине продаются синие ручки по 14 рублей, красные — по 15 рублей и зелёные — по 16 рублей. Вася купил несколько ручек всех трёх цветов, потратив на них ровно 170 рублей. Какое наименьшее число зелёных ручек он мог купить?

Ответ: 6.

В-4 В магазине продаются синие ручки по 14 рублей, красные — по 15 рублей и зелёные — по 16 рублей. Вася купил несколько ручек всех трёх цветов, потратив на них ровно 170 рублей. Какое наибольшее число зелёных ручек он мог купить?

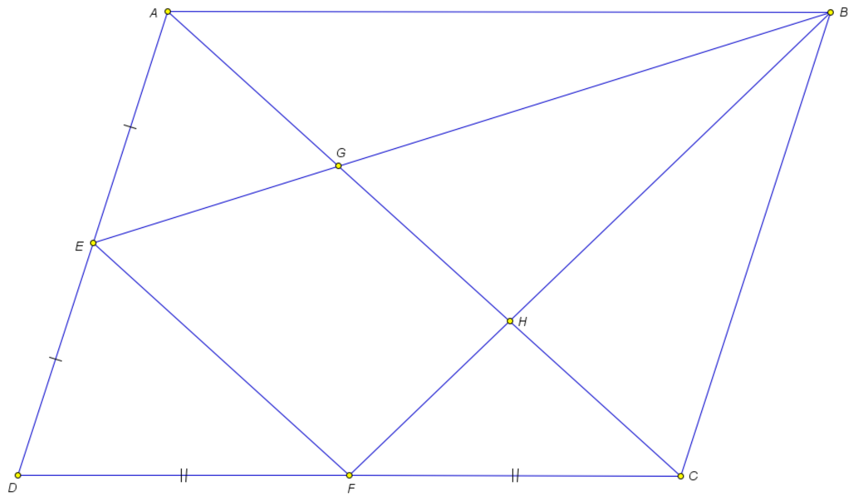
Ответ: 7.

Задача 5 (10 баллов)

В-1 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 24.

Ответ: 5.

Решение. Заметим, что $S_{GHFE} = S_{EBF} - S_{GBH}$, $S_{EBF} = S_{ABCD} - S_{AEB} - S_{EDF} - S_{BFC}$, $S_{AEB} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$ (так как в треугольнике AEB сторона AE в 2 раза меньше стороны параллелограмма AD, а в формуле для площади треугольника есть ещё множитель $\frac{1}{2}$). Аналогично, $S_{BFC} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$, $S_{EDF} = \frac{1}{4}S_{ADC} = \frac{1}{8}S_{ABCD}$ (так как треугольники EDF и ADC подобны и их площади относятся как квадрат коэффициента подобия, а площадь треугольника ADC равна половине площади параллелограмма). Следовательно, $S_{EBF} = S_{ABCD} - \frac{1}{4}S_{ABCD} - \frac{1}{4}S_{ABCD} - \frac{1}{8}S_{ABCD} = \frac{3}{8}S_{ABCD} = 9$.



Треугольники AEG и BGC подобны, поэтому $\frac{AG}{GC} = \frac{1}{2}$, т. е. $2AG = GH + HC$. Аналогично, из подобия треугольников FHC и AHB получаем, что $2HC = AG + GH$. Вычитая одно из этих равенств из другого, получаем $AG = GH = HC$. Значит, $S_{GBH} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{6}S_{ABCD} = 4$.

Таким образом, искомая площадь равна $S_{GHFE} = 9 - 4 = 5$.

В-2 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 48.

Ответ: 10.

В-3 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 12.

Ответ: 2.5.

В-4 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 36.

Ответ: 7.5.

Задача 6 (15 баллов)

В-1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y^2+5xy-2x^2-17y-6x+20=0, \\ 10y^2-2xy+5x^2-38y-6x+41=0. \end{cases}$$

В ответе укажите минимальное значение y, являющееся решением системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 2

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы как квадратное относительно y: $10y^2-2(x+19)y+(5x^2-6x+41)=0$. Его дискриминант равен

$$D=4\big((x+19)^2-10(5x^2-6x+41)\big)=-4\cdot 49(x-1)^2\leq 0.$$

Поэтому второе уравнение имеет решения только при $D=0$, откуда $x=1$. Подставляя это значение во второе уравнение системы, находим $y=2$. Нетрудно убедиться, что пара чисел $(1;2)$ удовлетворяет также первому уравнению системы.

В-2 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y^2+5xy-2x^2-17y-5x+3=0, \\ 10y^2-2xy+5x^2-20y+2x+10=0. \end{cases}$$

В ответе укажите минимальное значение y, являющееся решением системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 1

В-3 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y^2+5xy-2x^2-35y-21x+98=0, \\ 10y^2-2xy+5x^2-98y+245=0. \end{cases}$$

В ответе укажите минимальное значение y, являющееся решением системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 5

В-4 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y^2+5xy-2x^2-34y-12x+80=0, \\ 10y^2-2xy+5x^2-76y-12x+164=0. \end{cases}$$

В ответе укажите минимальное значение y, являющееся решением системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 4

Задача 7 (15 баллов)

В-1 Решите уравнение в целых числах:

$$y^2 + xy - 2x^2 - 15y + 15x - 1 = 0.$$

В ответе укажите сумму всех найденных натуральных значений y.

Ответ: 10

Решение. Запишем уравнение как квадратное относительно y:
$y^2 + (x - 15)y - (2x^2 - 15x + 1) = 0$. Его дискриминант равен $D = 221 + 30x - 7x^2$. Уравнение имеет (действительные) решения только при $D \geq 0$, что при целых x равносильно условию $x \in \{-3, -2, \ldots, 7, 8\}$. Перебирая указанные значения x, получим, что только при $x = 5$ получаются натуральные корни $y = 4$ и $y = 6$, сумма которых равна 10, а при других значениях x значения y получаются иррациональными.

В-2 Решите уравнение в целых числах:

$$y^2 - 3xy + 2x^2 + 3y - 3x - 1 = 0.$$

В ответе укажите сумму всех найденных натуральных значений y.

Ответ: 6

В-3 Решите уравнение в целых числах:

$$x^2 + xy - 2y^2 - 6x + 6y - 1 = 0.$$

В ответе укажите сумму всех найденных натуральных значений x.

Ответ: 4

В-4 Решите уравнение в целых числах:

$$x^2 - 4xy + 3y^2 + 8x - 8y - 1 = 0.$$

В ответе укажите сумму всех найденных натуральных значений x.

Ответ: 8

Задача 8 (20 баллов)

В-1 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 8. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 10.93

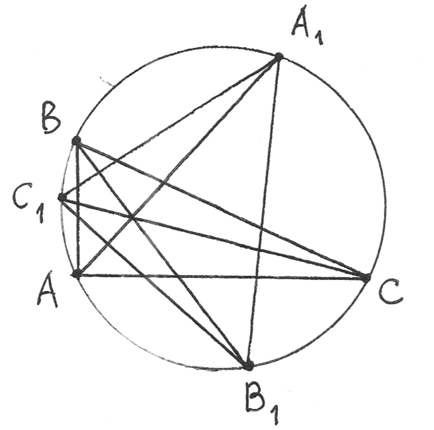
Решение. Обозначим углы треугольника α, β и γ, причём $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$. Тогда $\alpha = \beta + \gamma$, поэтому $2\alpha = \alpha + \beta + \gamma = \pi$, т. е. $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Возможны два случая.

1) Если $\alpha = 2\beta$, то $\beta = \frac{\pi}{4} = \gamma$, т. е. треугольник равнобедренный, что противоречит условию.

2) Пусть $\beta = 2\gamma$, тогда $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{6}$.

Пусть S — площадь треугольника ABC, S_1 — площадь треугольника $A_1B_1C_1$, R — радиус окружности, описанной около треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Так как треугольник ABC прямоугольный, то $BC = 2R$ и $S = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2$, а углы треугольника $A_1B_1C_1$ (по теореме о вписанном угле) равны $\alpha' = \frac{\pi}{4}$, $\beta' = \frac{\pi}{3}$, $\gamma' = \frac{5\pi}{12}$. Значит, $S_1 = \frac{1}{2}B_1A_1 \cdot B_1C_1 \cdot \sin\frac{\pi}{3}$. Из теоремы синусов, применённой к треугольнику $A_1B_1C_1$, получаем $B_1A_1 = 2R\sin\frac{5\pi}{12}$, $B_1C_1 = 2R\sin\frac{\pi}{4}$. Следовательно,

$$S_1 = 2R^2\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{4S}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = S\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 4\sqrt{3}+4 \approx 10.93.$$



В-2 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 14. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 19.12

В-3 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 10. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 13.66

В-4 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна 7. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 5.12

B-5 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна 9. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 6.59

B-6 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна 13. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 9.52
