
Задача 1. На гранях шестигранного игрального кубика расставлены числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Кубик бросают, и он падает на стол. После этого видны числа на всех гранях, кроме одной. Числа на пяти видимых гранях перемножаются. Найдите вероятность того, что это произведение делится на 16.

Ответ: $0,5$.

Решение. Если на невидимой грани нечётное число, то в произведении пяти оставшихся чисел присутствуют 2, 4 и 6, и оно делится на 16. Если на невидимой грани чётное число, то произведение остальных пяти цифр на 16 не делится – в его разложении на простые множители не будет четырёх двоек.

Задача 2. Найдите количество натуральных чисел, не превышающих 2022 и не входящих ни в арифметическую прогрессию $1, 3, 5, \ldots$, ни в арифметическую прогрессию $1, 4, 7, \ldots$

Ответ: 674.

Решение. Эти две прогрессии задают числа вида $1 + 2n$ и $1 + 3n$. Это означает, что искомые числа есть числа вида $6n$ и $6n - 4$, $n \in \mathbb{N}$. Так как 2022 кратно 6, то чисел вида $6n$ будет $\frac{2022}{6} = 337$, и чисел вида $6n - 4$ будет столько же. Значит, всего чисел $337 \cdot 2 = 674$.

Задача 3. Найдите три последние цифры числа $10^{2022} - 9^{2022}$.

Ответ: 119.

Решение. Так как $A = 10^{2022} - (10-1)^{2022} = 10^{2022} - 10^{2022} + 2022 \cdot 10^{2021} - C_{2022}^2 \cdot 10^{2022} + \ldots + C_{2022}^3 \cdot 10^3 - C_{2022}^2 \cdot 10^2 + C_{2022}^1 \cdot 10 - 1$, то $A \pmod{1000} \equiv -C_{2022}^2 \cdot 100 + C_{2022}^1 \cdot 10 - 1 \pmod{1000} \equiv -\frac{2022 \cdot 2021 \cdot 100}{2} + 20220 - 1 \pmod{1000} \equiv -100 + 220 - 1 \equiv 119$.

Задача 4. Семейство Дурслей скрывает Гарри Поттера на острове, который находится на расстоянии 9 км от берега. Берег прямолинейный. На берегу, в 15 километрах от той точки берега, которая ближе всего к острову, находится Хагрид на волшебном мотоцикле, и он хочет добраться до Гарри как можно быстрее. По побережью мотоцикл едет со скоростью 50 км/час, а над морем летит со скоростью 40 км/час. План у Хагрида такой: сначала проехать X километров по побережью, а потом взять курс напрямик на остров. Какое значение X наилучшим образом подходит для целей Хагрида?

Ответ: 3.

Решение. Пусть A — точка, откуда едет Хагрид, B — остров, а C — точка, где мотоцикл повернул в море. Время поездки $t = \frac{AC}{50} + \frac{BC}{40} = pAC + qBC = q(\frac{p}{q}AC + BC)$, где $p = \frac{1}{50}, q = \frac{1}{40}$. Значит, мы стремимся минимизировать $\frac{p}{q}AC + BC$. Отметим на берегу произвольную точку D, построим на AD как на диаметре окружность радиуса $q \cdot s : 2$ (s произвольное). Нарисуем окружность с центром в D и радиусом $p \cdot s$, пусть эта окружность пересекает первую на суше в точке E. На прямую AE опустим перпендикуляр BF, и он будет пересекать береговую линию в наилучшей точке C.

Докажем, что $\frac{p}{q}AC + BC$ минимально. Из подобия треугольников AFC и AED следует, что $CF/AC = DE/AD = \frac{p}{q}$, $CF = \frac{p}{q}AC$, то есть $\frac{p}{q}AC + BC = BF$. Если взять на побережье любую другую точку M и оценить $\frac{p}{q}AM + BM$, то получится следующее. $\frac{p}{q}AM + BM = KM + MB$, где KM — перпендикуляр из K на AE. А в свою очередь $KM + MB > BK > BF$.

Пусть L — ближайшая к острову точка берега. Треугольники BCL и ACF подобны, откуда $CL = \frac{BL \cdot CF}{AF}$. Следовательно, $CL = 12$ и $AC = X = 3$.

Задача 5. Найдите все значения x, при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a = x^3 - 100x, \quad b = x^4 - 16, \quad c = x + 20 - x^2$$

положительно (*средним* из трёх данных чисел a, b, c называется число v в тройке $u \leqslant v \leqslant w$, получаемой в результате упорядочения данных чисел по нестрогому возрастанию).

Ответ: $-10 < x < 0$, $2 < x < 5$, $x > 10$.

Решение. Среднее из трёх чисел положительно тогда и только тогда, когда положительны хотя бы два из трёх чисел. Решая соответствующую совокупность из систем двух неравенств, получим ответ.

Задача 6. Точка A на плоскости находится на одинаковом расстоянии от всех точек пересечения двух парабол, заданных в декартовой системе координат на плоскости уравнениями $y = -3x^2 + 2$ и $x = -4y^2 + 2$. Найдите это расстояние.

Ответ: $\frac{\sqrt{697}}{24}$.

Решение. Изобразив параболы с данными уравнениями, легко заметить, что они имеют 4 общие точки. Значит, равноудалённая от них точка может быть максимум одна. Перепишем уравнения парабол в виде $x^2 + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3} = 0$ и $y^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = 0$ и сложим. Получим уравнение

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y - \frac{7}{6} = 0 \Longleftrightarrow \left(x + \frac{1}{8}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{697}{576}.$$

Это уравнение окружности с центром $\left(-\frac{1}{8}; -\frac{1}{6}\right)$ радиуса $\frac{\sqrt{697}}{24}$, и ему удовлетворяют координаты всех точек пересечения парабол, а центр окружности удалён от этих точек пересечения на расстояние, равное радиусу окружности.

Задача 7. Есть некоторое количество одинаковых целлофановых пакетов, которые можно вкладывать друг в друга. Если внутри одного из пакетов оказались все остальные пакеты, назовём такую ситуацию «пакетом пакетов». Посчитайте, сколькими способами можно сложить «пакет пакетов» из 10 пакетов.

Пояснение. Обозначим скобочками пакет.
Если у нас был один пакет, то способ сложить «пакет пакетов» всего один: $()$.
Два пакета тоже можно сложить всего одним способом: $(())$.
Три пакета можно сложить двумя разными способами: $(()())$ *и* $((()))$, *и т.д.*
Порядок пакетов внутри пакета неважен. Например, вариант $((())())$ *не отличается от* $(()(()))$.

Ответ: 719.

Решение. Если Π_n обозначает число способов для n пакетов, то:

$$\Pi_1 = 1, \Pi_2 = 1, \Pi_3 = 2, \Pi_4 = 4, \Pi_5 = 9, \Pi_6 = 20, \Pi_7 = 48, \Pi_8 = 115, \Pi_9 = 286,$$

$$\Pi_{10} = 719.$$

Решается задача перебором вариантов. Например, если возьмём Π_5 :
$\Pi_5 = P_4 + P_3 + P_2 + P_1$, где P_k — число способов, соответствующих случаю, когда в корневом пакете находится k пакетов.
$P_4 = 1$, способ всего один: $(()()()())$.
$P_3 = 1$, способ тоже один: $((())()())$.
$P_2 = 3$, способов разбить 4 пакета на 2 кучки два: 3 и 1, 2 и 2. Первому способу соответствует $(\Pi_3())$ — два варианта, второму способу — один вариант, $((())(()))$.
$P_4 = \Pi_4$ способов: (Π_4).
В сумме получается 1 | 1 | (2 | 1) | 4=9.
С ростом n возникнут случаи, когда надо внимательно относиться к комбинаторике. Скажем, 8 пакетов можно разместить так: $(\Pi_3\ \Pi_3\ \Pi_1)$, а можно так: $(\Pi_3\ \Pi_2\ \Pi_2)$. Во втором случае это будет $\Pi_3 \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_2 = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$ способа, а в первом — не $\Pi_3 \cdot \Pi_3 \cdot \Pi_1 = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$, а на самом деле всего три, потому что порядок расположения тройных пакетов не важен.