Задача 1 (10 баллов)

В-1 Четвертый элемент арифметической прогрессии на 6 меньше утроенного пятого элемента. Найдите сумму первых десяти элементов этой прогрессии.

Ответ: 30

Решение. Обозначим данную прогрессию $\{a_n\}$; тогда по условию $a_4 = 3a_5 - 6$. Если d — разность прогрессии, то $a_4 = a_5 - d = 3a_5 - 6$, откуда $2a_5 + d = 6$. Сумма первых 10 элементов прогрессии равна

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = (a_5 - 4d) + (a_5 - 3d) + \ldots + (a_5 + 5d) = 10a_5 + 5d = 5(2a_5 + d) = 5 \cdot 6 = 30.$$

В-2 Утроенный шестой элемент арифметической прогрессии на 4 больше пятого элемента. Найдите сумму первых двенадцати элементов этой прогрессии.

Ответ: 24

В-3 Четвертый элемент арифметической прогрессии на 2 меньше утроенного седьмого элемента. Найдите сумму первых шестнадцати элементов этой прогрессии.

Ответ: 16

В-4 Утроенный восьмой элемент арифметической прогрессии на 3 больше пятого элемента. Найдите сумму первых восемнадцати элементов этой прогрессии.

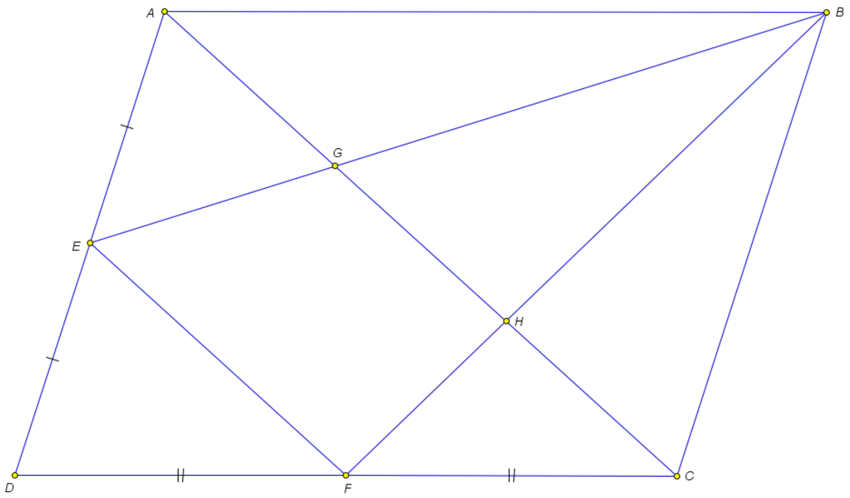
Ответ: 27

Задача 2 (10 баллов)

В-1 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 24.

Ответ: 5.

Решение. Заметим, что $S_{GHFE} = S_{EBF} - S_{GBH}$, $S_{EBF} = S_{ABCD} - S_{AEB} - S_{EDF} - S_{BFC}$, $S_{AEB} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$ (так как в треугольнике AEB сторона AE в 2 раза меньше стороны параллелограмма AD, а в формуле для площади треугольника есть ещё множитель $\frac{1}{2}$). Аналогично, $S_{BFC} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$, $S_{EDF} = \frac{1}{4}S_{ADC} = \frac{1}{8}S_{ABCD}$ (так как треугольники EDF и ADC подобны и их площади относятся как квадрат коэффициента подобия, а площадь треугольника ADC равна половине площади параллелограмма). Следовательно, $S_{EBF} = S_{ABCD} - \frac{1}{4}S_{ABCD} - \frac{1}{4}S_{ABCD} - \frac{1}{8}S_{ABCD} = \frac{3}{8}S_{ABCD} = 9$.



Треугольники AEG и BGC подобны, поэтому $\frac{AG}{GC} = \frac{1}{2}$, т. е. $2AG = GH + HC$. Аналогично, из подобия треугольников FHC и AHB получаем, что $2HC = AG + GH$. Вычитая одно из этих равенств из другого, получаем $AG = GH = HC$. Значит, $S_{GBH} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{6}S_{ABCD} = 4$.

Таким образом, искомая площадь равна $S_{GHFE} = 9 - 4 = 5$.

В-2 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 48.

Ответ: 10.

В-3 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 12.

Ответ: 2.5.

В-4 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 36.

Ответ: 7.5.

Задача 3 (10 баллов)

В-1 Пусть (a, b) — точка на графике функции $y = x + \frac{1}{x}$, ближайшая к началу координат. Найдите $(b-a)^{20}$.

Ответ: 32.

Решение. Квадрат расстояния от точки $(x, x + \frac{1}{x})$ до начала координат равен

$$r^2 = x^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 2x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \geqslant 2\sqrt{2x^2 \cdot \frac{1}{x^2}} + 2 = 2\sqrt{2} + 2,$$

причём равенство достигается при условии $2x^2 = \frac{1}{x^2}$. Следовательно, $a = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, поэтому $(b-a)^{20} = a^{-20} = 2^5 = 32$.

В-2 Пусть (a, b) — точка на графике функции $y = x - \frac{1}{x}$, ближайшая к началу координат. Найдите $(b-a)^{24}$.

Ответ:

Ответ: 64.

В-3 Пусть (a, b) — точка на графике функции $y = x + \frac{1}{x}$, ближайшая к началу координат. Найдите $(b-a)^{28}$.

Ответ: 128.

В-4 Пусть (a, b) — точка на графике функции $y = x - \frac{1}{x}$, ближайшая к началу координат. Найдите $(b-a)^{32}$.

Ответ: 256.

Задача 4 (10 баллов)

В-1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y^2+5xy-2x^2-17y-6x+20=0, \\ 10y^2-2xy+5x^2-38y-6x+41=0. \end{cases}$$

В ответе укажите минимальное значение y, являющееся решением системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 2

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы как квадратное относительно y: $10y^2-2(x+19)y+(5x^2-6x+41)=0$. Его дискриминант равен

$$D=4\big((x+19)^2-10(5x^2-6x+41)\big)=-4\cdot 49(x-1)^2\leq 0.$$

Поэтому второе уравнение имеет решения только при $D=0$, откуда $x=1$. Подставляя это значение во второе уравнение системы, находим $y=2$. Нетрудно убедиться, что пара чисел $(1;2)$ удовлетворяет также первому уравнению системы.

В-2 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y^2+5xy-2x^2-17y-5x+3=0, \\ 10y^2-2xy+5x^2-20y+2x+10=0. \end{cases}$$

В ответе укажите минимальное значение y, являющееся решением системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 1

В-3 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y^2+5xy-2x^2-35y-21x+98=0, \\ 10y^2-2xy+5x^2-98y+245=0. \end{cases}$$

В ответе укажите минимальное значение y, являющееся решением системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 5

В-4 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y^2+5xy-2x^2-34y-12x+80=0, \\ 10y^2-2xy+5x^2-76y-12x+164=0. \end{cases}$$

В ответе укажите минимальное значение y, являющееся решением системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 4

Задача 5 (10 баллов)

В-1 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 8. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 10.93

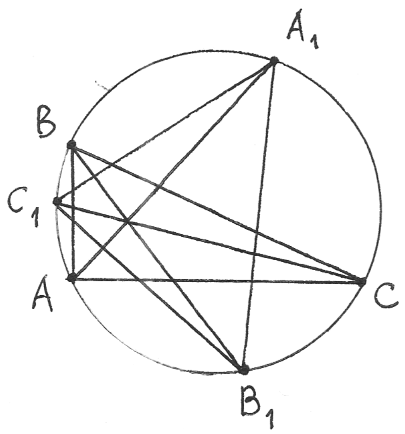
Решение. Обозначим углы треугольника α, β и γ, причём $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$. Тогда $\alpha = \beta + \gamma$, поэтому $2\alpha = \alpha + \beta + \gamma = \pi$, т. е. $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Возможны два случая.

1) Если $\alpha = 2\beta$, то $\beta = \frac{\pi}{4} = \gamma$, т. е. треугольник равнобедренный, что противоречит условию.

2) Пусть $\beta = 2\gamma$, тогда $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{6}$.

Пусть S — площадь треугольника ABC, S_1 — площадь треугольника $A_1B_1C_1$, R — радиус окружности, описанной около треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Так как треугольник ABC прямоугольный, то $BC = 2R$ и $S = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2$, а углы треугольника $A_1B_1C_1$ (по теореме о вписанном угле) равны $\alpha' = \frac{\pi}{4}$, $\beta' = \frac{\pi}{3}$, $\gamma' = \frac{5\pi}{12}$. Значит, $S_1 = \frac{1}{2}B_1A_1 \cdot B_1C_1 \cdot \sin\frac{\pi}{3}$. Из теоремы синусов, применённой к треугольнику $A_1B_1C_1$, получаем $B_1A_1 = 2R\sin\frac{5\pi}{12}$, $B_1C_1 = 2R\sin\frac{\pi}{4}$. Следовательно,

$$S_1 = 2R^2 \sin\frac{5\pi}{12} \sin\frac{\pi}{4} \sin\frac{\pi}{3} = \frac{4S}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = S\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 4\sqrt{3} + 4 \approx 10.93.$$



В-2 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 14. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 19.12

В-3 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 10. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 13.66

В-4 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна 7. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 5.12

B-5 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна 9. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 6.59

B-6 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна 13. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 9.52

Задача 6 (10 баллов)

В-1 Фабрика производит $n > 15\,000$ ёлочных игрушек в месяц и является убыточной. Известно, что при изготовлении n ёлочных игрушек в месяц расходы фабрики на производство одной игрушки составляют не менее $\dfrac{126\,000}{n}+9-\left|3-\dfrac{54\,000}{n}\right|$ рублей, а цена реализации каждой игрушки при этом не превосходит $18-\dfrac{1}{4000}n$ рублей. Определите ежемесячный объём производства, при котором ежемесячные убытки могут быть снижены до наименьшего из возможных в данных условиях уровня. Вариант полной остановки производства исключён.

Ответ: 24 000

Решение. Обозначим расходы на производство n игрушек в месяц через $f(n)$. По условию:

$$f(n) \geqslant g(n) := n\left(\frac{126000}{n}+9-\left|3-\frac{54\,000}{n}\right|-18-\frac{1}{4000}n\right),$$

т.е. $f(n) \geqslant g(n) = \frac{n^2}{4000} - 9n - |3n-54000| + 126000.$

1) Пусть $n \geqslant 18000$. Тогда $g(n) = \frac{n^2}{4000} - 12n - 180000 \geqslant g(n_0)$, где $n_0 = \frac{12}{1/2000} = 24000$. При этом $g(24000) = 36000$.

2) Пусть $0 < n < 18000$. Тогда $g(n) = \frac{n^2}{4000} - 6n + 72000 \geqslant g(n_0)$, где $n_0 = \frac{6}{1/2000} = 12000$. При этом $g(12000) = 36000$.

Таким образом, наименьшее значение расходов в месяц равно 36000 руб. и достигается оно при $n = 24000$ или $n = 12000$.

В-2 Фабрика производит $n > 400$ искусственных елей в месяц, и производство является прибыльным. Известно, что при изготовлении n искусственных елей в месяц расходы предприятия на изготовление одной ели составляют не менее $\dfrac{40\,500}{n}+270-\left|90-\dfrac{40\,500}{n}\right|$ рублей, а цена реализации каждой ели при этом не превосходит $540-\dfrac{3}{10}n$ рублей. Определите ежемесячный объём производства, при котором может быть получена наибольшая из возможных в данных условиях прибыль.

Ответ: 600

В-3 Фабрика производит $n < 20\,000$ ёлочных игрушек в месяц и является убыточной. Известно, что при изготовлении n ёлочных игрушек в месяц расходы предприятия на изготовление одной игрушки составляют не менее $\dfrac{126\,000}{n}+9-\left|3-\dfrac{54\,000}{n}\right|$ рублей, а цена реализации каждой игрушки при этом не превосходит $18-\dfrac{1}{4000}n$ рублей. Определите ежемесячный объём производства, при котором ежемесячные убытки могут быть снижены до наименьшего из возможных в данных условиях уровня. Вариант полной остановки производства исключён.

Ответ: 12 000

В-4 Фабрика производит $n < 500$ искусственных елей в месяц, и производство является прибыльным. Известно, что при изготовлении n искусственных елей в месяц расходы фабрики на изготовление одной ели составляют не менее $\dfrac{40\,500}{n}+270-\left|90-\dfrac{40\,500}{n}\right|$ рублей, а цена реализации каждой ели при этом не превосходит $540-\dfrac{3}{10}n$ рублей. Определите ежемесячный объём производства, при котором может быть получена наибольшая из возможных в данных условиях прибыль.

Ответ: 300

Задача 7 (10 баллов)

В-1 Решите уравнение в целых числах:

$$y^2 + xy - 2x^2 - 15y + 15x - 1 = 0.$$

В ответе укажите сумму всех найденных натуральных значений y.

Ответ: 10

Решение. Запишем уравнение как квадратное относительно y: $y^2 + (x-15)y - (2x^2 - 15x + 1) = 0$. Его дискриминант равен $D = 221 + 30x - 7x^2$. Уравнение имеет (действительные) решения только при $D \geq 0$, что при целых x равносильно условию $x \in \{-3, -2, \ldots, 7, 8\}$. Перебирая указанные значения x, получим, что только при $x = 5$ получаются натуральные корни $y = 4$ и $y = 6$, сумма которых равна 10, а при других значениях x значения y получаются иррациональными.

В-2 Решите уравнение в целых числах:

$$y^2 - 3xy + 2x^2 + 3y - 3x - 1 = 0.$$

В ответе укажите сумму всех найденных натуральных значений y.

Ответ: 6

В-3 Решите уравнение в целых числах:

$$x^2 + xy - 2y^2 - 6x + 6y - 1 = 0.$$

В ответе укажите сумму всех найденных натуральных значений x.

Ответ: 4

В-4 Решите уравнение в целых числах:

$$x^2 - 4xy + 3y^2 + 8x - 8y - 1 = 0.$$

В ответе укажите сумму всех найденных натуральных значений x.

Ответ: 8

Задача 8 (15 баллов)

В-1 Решите уравнение

$$\cos^2 8x \sin 2x + 2\cos^2 x = 1 + \sqrt{2}.$$

В ответе укажите сумму корней, принадлежащих отрезку $[0; 2\pi]$, при необходимости округлив ее до двух знаков после запятой.

Ответ: $\frac{5\pi}{4} \approx 3.93$

Решение. Переходим к уравнению $\cos^2 8x \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}$, а потом, с помощью вспомогательного аргумента, к уравнению $\sqrt{1+\cos^4 8x}\sin(2x+\varphi) = \sqrt{2}$, которое равносильно тому, что $\cos^4 8x$ и $\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ одновременно равняются единице.

В-2 Решите уравнение

$$\sin^4 6x \sin 2x + 2\sqrt{3}\cos^2 x = 2 + \sqrt{3}.$$

В ответе укажите сумму корней, принадлежащих отрезку $[0; 2\pi]$, при необходимости округлив ее до двух знаков после запятой.

Ответ: $\frac{7\pi}{6} \approx 3.67$

В-3 Решите уравнение

$$\cos^2 8x \sin 2x - 2\cos^2 x = \sqrt{2} - 1.$$

В ответе укажите сумму корней, принадлежащих отрезку $[0; 2\pi]$, при необходимости округлив ее до одного знака после запятой.

Ответ: $\frac{7\pi}{4} \approx 5.5$

В-4 Решите уравнение

$$\sin^4 6x \sin 2x - 2\sqrt{3}\cos^2 x = 2 - \sqrt{3}.$$

В ответе укажите сумму корней, принадлежащих отрезку $[0; 2\pi]$, при необходимости округлив ее до двух знаков после запятой.

Ответ: $\frac{11\pi}{6} \approx 5.76$

Задача 9 (15 баллов)

В-1 Пусть $\hat{x}$ — наибольший корень многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Найти остаток от деления целой части числа $\hat{x}^{2021}$ на 17. Целая часть числа a — это наибольшее целое число, не превосходящее числа a.

Ответ: 10.

Решение. Заметим, что $f(-3/5) = -\frac{27}{125} - \frac{27}{125} + 1 < 0$, $f(-1/2) = -\frac{1}{8} - \frac{3}{4} + 1 > 0$, $f(3/5) = \frac{27}{125} - \frac{27}{125} + 1 = \frac{17}{125} > 0$, $f(7/10) = \frac{343}{1000} - \frac{147}{100} + 1 = \frac{343-470}{1000} < 0$, $f(2) = 8 - 12 + 1 < 0$, $f(3) = 27 - 27 + 1 > 0$. Следовательно, кубический многочлен f имеет три вещественных корня $x_1 < x_2 < x_3$, причем $-3/5 < x_1 < -1/2$, $3/5 < x_2 < 7/10$, $2 < x_3 < 3$ ($x_3 = \hat{x}$). Для каждого целого неотрицательного n определим число $a_n := x_1^n + x_2^n + x_3^n$. Очевидно что $a_0 = 3$, далее из теоремы Виета следует, что $a_1 = 3$, $a_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 9 - 0 = 9$. Если равенства $x_i^3 = 3x_i^2 - 1$ умножить соответственно на x_i^n при $i = 1, 2, 3$ и сложить, то получим:

$$x_1^{n+3} + x_2^{n+3} + x_3^{n+3} = 3(x_1^{n+2} + x_2^{n+2} + x_3^{n+2}) - (x_1^n + x_2^n + x_3^n),$$

т.е. имеет место рекуррентное соотношение

$$a_{n+3} = 3a_{n+2} - a_n.$$

Очевидно, что $[x_3^n] = a_n - 1$.

Далее рассмотрим остатки последовательности a_n при делении на 17. Последовательность остатков имеет цикл длины 16:

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}
3	3	9	7	1	11	9	9	16	5	6	2	1	14	6	0	3	3	9

Так как $2021 = 126 \cdot 16 + 5$, то $a_{2021} \pmod{17} = a_5 \pmod{17} = 11$. Поэтому $[\hat{x}^{2021}] \pmod{17} = 10$.

В-2 Пусть $\hat{x}$ — наибольший корень многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Найти остаток от деления целой части числа $\hat{x}^{2022}$ на 17. Целая часть числа a — это наибольшее целое число, не превосходящее числа a.

Ответ: 8.

В-3 Пусть $\hat{x}$ — наибольший корень многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Найти остаток от деления целой части числа $\hat{x}^{2023}$ на 17. Целая часть числа a — это наибольшее целое число, не превосходящее числа a.

Ответ: 8.

В-4 Пусть $\hat{x}$ — наибольший корень многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Найти остаток от деления целой части числа $\hat{x}^{2024}$ на 17. Целая часть числа a — это наибольшее целое число, не превосходящее числа a.

Ответ: 15.

В-5 Найти остаток от деления целой части числа $\hat{x}^{2025}$ на 17. Целая часть числа a — это наибольшее целое число, не превосходящее числа a.

Ответ: 4.
