

Задача 1. Найдите наименьшее натуральное число, обладающее следующим свойством: остаток от его деления на 20 на единицу меньше остатка от его деления на 21, а остаток от его деления на 22 равен 2.

Ответ: 838.

Решение. Искомое число равно $20k + a = 21l + a + 1 = 22m + 2$, где $0 \leq a \leq 19$ и $l, k, m \geq 0$. Из первого равенства и сравнения по модулю 20 получаем, что $l + 1 \equiv 0 \pmod{20}$. Так как ищем наименьшее число, то попробуем $l = 19$, если это l не подойдёт, то рассмотрим $l = 19 + 20 = 39$ и так далее. Ищем искомое число в виде $21 \cdot 19 + a + 1 = 22m + 2$, сравниваем по модулю 22: $3 + a + 1 \equiv 2 \pmod{22}$, следовательно, $a \equiv 20 \pmod{22}$, что невозможно. Теперь ищем искомое число в виде $21 \cdot 39 + a + 1 = 22m + 2$, значит, $5 + a + 1 \equiv 2 \pmod{22}$, то есть $a \equiv 18 \pmod{22}$. Число $21 \cdot 39 + 18 + 1 = 838$ удовлетворяет условию и наименьшее по построению.

Задача 2. Треугольная пирамидка, все рёбра которой имеют длину 6 см, стоит на плоском столе. Пирамидку перекачивают по столу через рёбра 6 раз таким образом, что одна из её вершин всё время остаётся неподвижной, при этом два раза подряд через одно и то же ребро пирамидку не перекачивают. Найдите длину траектории, по которой за время этих перекачиваний перемещается подвижная вершина пирамиды.

Ответ: $(\pi - \arccos \frac{1}{3}) \cdot 12\sqrt{3}$ см.

Решение. Обозначим пирамидку $ABCD$. Пусть A — неподвижная вершина, а вершина D в начальный момент не касается поверхности стола. Пусть первое перекачивание осуществляется через ребро AB . Вершина D при этом перекачивании перемещается по дуге окружности с центром в середине H ребра AB и радиусом, равным апофеме пирамидки, то есть $3\sqrt{3}$ см. По теореме косинусов из треугольника CDH находим, что $\cos \angle CHD = \frac{1}{3}$, поэтому на дугу окружности, по которой движется точка D , опирается центральный угол величиной $\pi - \arccos \frac{1}{3}$. Значит, длина этой дуги равна $(\pi - \arccos \frac{1}{3}) \cdot 3\sqrt{3}$ см. При втором перекачивании (через ребро AD) точка D остаётся неподвижной, при третьем (через ребро AB) проходит по дуге такой же длины, как при первом перекачивании, а следующие три перекачивания происходят аналогично первым трём, и в результате пирамидка возвращается в исходное положение. При этом точка D перемещается по траектории длиной $4 \cdot (\pi - \arccos \frac{1}{3}) \cdot 3\sqrt{3}$ см.

Задача 3. Найдите три последние цифры числа $10^{2022} - 9^{2022}$.

Ответ: 119.

Решение. Так как $A = 10^{2022} - (10 - 1)^{2022} = 10^{2022} - 10^{2022} + 2022 \cdot 10^{2021} - C_{2022}^2 \cdot 10^{2022} + \dots + C_{2022}^3 \cdot 10^3 - C_{2022}^2 \cdot 10^2 + C_{2022}^1 \cdot 10 - 1$, то $A \pmod{1000} \equiv -C_{2022}^2 \cdot 100 + C_{2022}^1 \cdot 10 - 1 \pmod{1000} \equiv -\frac{2022 \cdot 2021 \cdot 100}{2} + 20220 - 1 \pmod{1000} \equiv -100 + 220 - 1 \equiv 119$.

Задача 4. По окружности выписаны 2022 единицы. Два игрока ходят по очереди: за один ход игрок стирает два соседних числа из написанных и пишет вместо них их сумму (один раз). Выигрывает тот, кто получит число 4. Если в конце игры остаётся одно число, не равное 4, игра оканчивается вничью. Может ли кто-то из игроков обеспечить себе победу, и если да, то каким образом?

Ответ: Выиграет второй.

Решение. Выиграет второй. Стратегия: повторять ходы первого игрока симметрично относительно центра окружности до тех пор, пока после хода первого игрока не возникнут либо две соседствующие двойки, либо тройка, соседствующая с единицей. В этих случаях второй игрок перехватывает инициативу и побеждает.

Почему такие ситуации непременно должны возникнуть? Почему игру нельзя свести к ничьей? Давайте представим, что на поле пока ещё нет чисел больше двух. Если игра идёт, то рано или поздно должны появиться числа, большие двух. Как это произойдёт? Из единиц и двоек можно сложить либо тройку, либо четвёрку. Четвёрка складывается из двух соседствующих двоек и приносит победу. Если после хода первого игрока на поле нет 2 2, то и после зеркального хода второго 2 2 на поле не появится. Если первый допустил 2 2, то второй побеждает.

Значит, рассмотрим тройку. Чтобы тройка не привела второго к победе, нужно, чтобы с ней не соседствовала единица, то есть на поле нужно сочетание 2 3 2. А как могло выглядеть это поле ход назад? 2 (2 1) 2, опять получаем двойки по соседству.

Поэтому появления плохой для себя комбинации первый игрок избежать не может.

Задача 5. Число a таково, что уравнение $t^3 + 4t^2 + 4t + a = 0$ имеет три действительных корня $x < y < z$. Определите, какие числовые значения может принимать выражение

$$A = x^3 - 4y^2 - 4z^2 - 4y - 4z + 32.$$

Ответ: $(14\frac{22}{27}; 16)$.

Решение. Пусть $P(t) = t^3 + 4t^2 + 4t + a = (t - x)(t - y)(t - z)$. Тогда $x + y + z = -4$, $xy + yz + xz = 4$, $xyz = -a$ (это получается или по теореме Виета, или прямым сравнением левой и правой части). Далее $A = x^3 - 4y^2 - 4z^2 - 4y - 4z + 32 = (-4x^2 - 4x - a) - 4y^2 - 4z^2 - 4y - 4z + 32 = -4(x^2 + y^2 + z^2) - 4(x + y + z) - a + 32 = -4(x + y + z)^2 + 8(xy + yz + xz) - 4(x + y + z) - a + 32 = -4 \cdot (-4)^2 + 8 \cdot 4 - 4 \cdot (-4) - a + 32 = 16 - a$. Осталось выяснить, при каких значениях a данное кубическое уравнение имеет три различных корня. Запишем уравнение в виде $a = -t^3 - 4t^2 - 4t = -t(t + 2)^2$ и найдем экстремумы функции в правой части (например, с помощью производной, хотя можно обойтись и без неё). Получается, что эта функция имеет локальный минимум 0 в точке $t = -2$ и локальный максимум $\frac{32}{27}$ в точке $t = -\frac{2}{3}$. Это означает, что 3 различных корня у уравнения будет при $a \in (0; \frac{32}{27})$. Значит, $A = 16 - a \in (16 - \frac{32}{27}; 16) = (14\frac{22}{27}; 16) = (\frac{400}{27}; 16)$.

Задача 6. Найдите координаты всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от всех точек пересечения парабол, заданных в декартовой системе координат на плоскости уравнениями $y = 2x^2 - 1$ и $x = 4y^2 - 2$.

Ответ: $(\frac{1}{8}; \frac{1}{4})$.

Решение. Изобразив параболы с данными уравнениями, легко заметить, что они имеют 4 общие точки. Значит, равноудалённая от них точка может быть максимум одна. Перепишем уравнения парабол в виде $x^2 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = 0$ и $y^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = 0$ и сложим. Получим уравнение

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y - 1 = 0 \iff \left(x - \frac{1}{8}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{69}{64}.$$

Это уравнение окружности с центром $(\frac{1}{8}; \frac{1}{4})$ радиуса $\frac{\sqrt{69}}{8}$, и ему удовлетворяют координаты всех точек пересечения парабол, а центр окружности равноудалён от этих точек пересечения.

Задача 7. Есть некоторое количество одинаковых целлофановых пакетов, которые можно вкладывать друг в друга. Если внутри одного из пакетов оказались все остальные пакеты, назовём такую ситуацию «пакетом пакетов». Посчитайте, сколькими способами можно сложить «пакет пакетов» из 10 пакетов.

Пояснение. Обозначим скобочками пакет.

Если у нас был один пакет, то способ сложить «пакет пакетов» всего один: $(())$.

Два пакета тоже можно сложить всего одним способом: $((()))$.

Три пакета можно сложить двумя разными способами: $((())())$ и $((()()))$, и т.д.

Порядок пакетов внутри пакета неважен. Например, вариант $((())())$ не отличается от $((()()))$.

Ответ: 719.

Решение. Если Π_n обозначает число способов для n пакетов, то:

$$\Pi_1 = 1, \Pi_2 = 1, \Pi_3 = 2, \Pi_4 = 4, \Pi_5 = 9, \Pi_6 = 20, \Pi_7 = 48, \Pi_8 = 115, \Pi_9 = 286,$$

$$\Pi_{10} = 719.$$

Решается задача перебором вариантов. Например, если возьмём Π_5 :

$\Pi_5 = P_4 + P_3 + P_2 + P_1$, где P_k — число способов, соответствующих случаю, когда в корневом пакете находится k пакетов.

$P_4 = 1$, способ всего один: $((())())$.

$P_3 = 1$, способ тоже один: $((())())$.

$P_2 = 3$, способов разбить 4 пакета на 2 кучки два: 3 и 1, 2 и 2. Первому способу соответствует $(\Pi_3())$ — два варианта, второму способу — один вариант, $((())())$.

$P_4 = \Pi_4$ способов: (Π_4) .

В сумме получается $1+1+(2+1)+4=9$.

С ростом n возникнут случаи, когда надо внимательно относиться к комбинаторике. Скажем, 8 пакетов можно разместить так: $(\Pi_3 \Pi_3 \Pi_1)$, а можно так: $(\Pi_3 \Pi_2 \Pi_2)$. Во втором случае это будет $\Pi_3 \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_2 = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$ способа, а в первом — не $\Pi_3 \cdot \Pi_3 \cdot \Pi_1 = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$, а на самом деле всего три, потому что порядок расположения тройных пакетов не важен.