2022 г.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по ГЕОЛОГИИ

Заключительный этап (10-11 классы)

Задание 1. (20 баллов)

Процесс изменения толщины антарктического льда зависит от длительности этого процесса в соответствии с законом

$$h = \log_a(a + (t-a)_+) - \log_{a^2}(a^2 + (t-a^2)_+),$$

t – переменная времени (в млн. лет), h – толщина (в км.), a – параметр структуры льда, a>1, для любого $c \in R$ значение $(c)_+ = \max(c,0) = \begin{cases} 0, c \le 0, \\ c, c \ge 0 \end{cases}$. При каких значениях a массив льда, толщина которого находится в пределах отрезка [0.5;1.5] , не мог формироваться в пределах временного промежутка [1.5;3]?

Решение. Представим глубину в более простом виде:

$$h(t) = \begin{cases} 0, t \le a \\ log_a t - 1, a < t \le a^2 \\ 0.5 log_a t, t > a^2 \end{cases}$$. При этом

$$h(t) \in [0.5,1.5] <=> t \in \left[a^{\frac{3}{2}}, a^3\right] => \left[\begin{matrix} a^{3/2} > 3 \\ a^3 < 3/2 \end{matrix}\right. <=> a \in \left(1, \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) \cup (3^{\frac{2}{3}}, \infty).$$

Таким образом получаем

Ответ: $\left(1, \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) \cup (3^{\frac{2}{3}}, \infty)$

Задание 2. (15 баллов)

В газовый баллон ёмкостью V насосом закачивают пропан C_3H_8, после чего в баллоне устанавливается состояние теплового равновесия при температуре $t_1 = 15$ ℃ Часть пропана в баллоне при этом находится в жидком состоянии и занимает объём V_1, а часть – в газообразном. Если баллон полностью заполнить жидким пропаном, то при его нагревании давление жидкого пропана в баллоне начнёт резко возрастать, и баллон немедленно разрушится. Максимальная доля объёма баллона, которую может занимать жидкий пропан при температуре t_1, чтобы при нагревании вплоть до температуры $t_2 = 60$ ℃ жидкий пропан так и не занял весь объём баллона, $k = V_{1max}/V = 0{,}85$. Плотность жидкого пропана и давление насыщенных паров пропана при температуре $t_1 = 15$ ℃равны, соответственно, ρ_1 и $p_{нас}$ = 0,9 МПа, молярная масса пропана μ = 44 г/моль, универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(моль·К). С ростом температуры плотность жидкого пропана понижается и при температуре $t_2 = 60$ ℃ равна

$\rho_2 = 434$ кг/$м^3 < \rho_1$. Найдите значение ρ_1. Учесть массу газообразного пропана в баллоне при температуре $t_1 = 15$ ℃

Решение

Согласно условию, если жидкий пропан при температуре t_1 занимает объём V_{1max}, то при температуре t_2 жидкий пропан занимает весь объём V, а газообразного пропана в баллоне нет. Поэтому общая масса пропана в баллоне, которая не меняется с изменением температуры, равна массе $m = \rho_2 V$ жидкого пропана при температуре t_2. При $t_1 < t_2$ плотность жидкого пропана $\rho_1 > \rho_2$, следовательно, масса m жидкого пропана при температуре t_1 уже не может занимать весь объём V. Поэтому часть пропана массой m_1 при температуре t_1 находится в жидком состоянии, занимая объём V_{1max}, а другая часть массой $m_2 = m - m_1$ существует в виде насыщенных паров пропана под давлением $p_{нас}$, занимая остальной объём $V - V_{1max}$.

Отсюда следует, что при температуре t_1 масса жидкого пропана $m_1 = \rho_1 V_{1max}$. С помощью уравнения Клапейрона–Менделеева $(pV = (m/\mu)RT)$ получим массу m_2 насыщенных паров пропана при температуре t_1:

$$m_2 = \frac{\mu p_{нас}}{RT_1}(V - V_{1max}).$$

Таким образом, общая масса пропана в баллоне при температуре t_1 равна

$$m = m_1 + m_2 = \rho_1 V_{1max} + \frac{\mu p_{нас}}{RT_1}(V - V_{1max}).$$

Приравнивая друг другу два выражения для m, получим уравнение

$$\rho_2 V = \rho_1 V_{1max} + \frac{\mu p_{нас}}{RT_1}(V - V_{1max}).$$

Поделив его почленно на V, и учтя, что $V_{1max}/V = k$, получим:

$$\rho_2 = \rho_1 k + \frac{\mu p_{нас}}{RT_1}\cdot(1-k), \quad \text{откуда} \quad \rho_1 = \frac{1}{k}\cdot\left[\rho_2 - \frac{\mu p_{нас}}{RT_1}\cdot(1-k)\right].$$

Подставляя числовые значения величин, получим:

$$\rho_1 = \frac{1}{0{,}85}\cdot\left[434 - \frac{0{,}044\cdot 9\cdot 10^5}{8{,}31\cdot 288}\cdot(1-0{,}85)\right] \approx \frac{434 - 2{,}48}{0{,}85} \approx 508\ кг/м^3.$$

Ответ: $\rho_1 \approx 508\ кг/м^3$

Задание 3. (20 баллов)

Образец представляет собой четырехугольную пирамиду с основанием ABCD и вершиной S, удаленной от плоскости основания на $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Противоположные боковые грани SAB и SCD перпендикулярны плоскости основания. Стороны AD и AB основания ABCD равны 2 и $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ соответственно, угол BAD равен $\frac{\pi}{6}$, угол ABC равен $\frac{2\pi}{3}$, угол ADC равен $\frac{\pi}{3}$. Чему равно отношение расстояния от точки B до линии пересечения плоскостей SBC и SAD к длине BC?

Решение. Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxyz, вершина S лежит на оси z, S(0,0, $\sqrt{\frac{3}{2}}$). Поскольку грани SAB и SCD перпендикулярны плоскости основания, углы BAD и ADC равны $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{3}$ соответственно, то оси x,y можно направить так, что проекции граней SAB и SCD будут лежать на осях x и y соответственно: AB лежит на оси x, CD лежит на оси y, проекция S на плоскость ABCD совпадает с началом координат O. Далее, в прямоугольном треугольнике AOD гипотенуза AD=2, точки A и D имеют координаты ($\sqrt{3}$,0,0) и (0,1,0) соответственно. Пусть K - точка пересечения BC и AD, тогда в равнобедренном треугольнике ABK углы A и K равны $\frac{\pi}{6}$, угол B равен $\frac{2\pi}{3}$. Кроме того, в прямоугольном треугольнике BOC углы B и C равны соответственно $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{6}$. В треугольнике ABK длина стороны AB по условию равна $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, откуда длина AK равна $\frac{9}{4}$, длина OB равна $\frac{\sqrt{3}}{4}$, длина OC равна $\frac{3}{4}$, CD=$\frac{1}{4}$. Длина DK равна $\frac{1}{4}$, угол ADC равен $\frac{\pi}{3}$, откуда легко определяются координаты K($-\frac{\sqrt{3}}{8}$,$\frac{9}{8}$,0), принадлежащей плоскостям SBC, SAD и плоскости основания ABCD. Длина SK равна $\frac{3\sqrt{5}}{4}$, длина BS по теореме Пифагора равна $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. Стороны BS и BK треугольника BKS равны, отсюда h - длина высоты треугольника BKS, опущенной из B на KS, равна $\sqrt{BS^2 - 0.25 \cdot SK^2} = 3\frac{\sqrt{7}}{8}$.

Теперь искомое отношение равно $\frac{\sqrt{21}}{4}$

Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{4}$

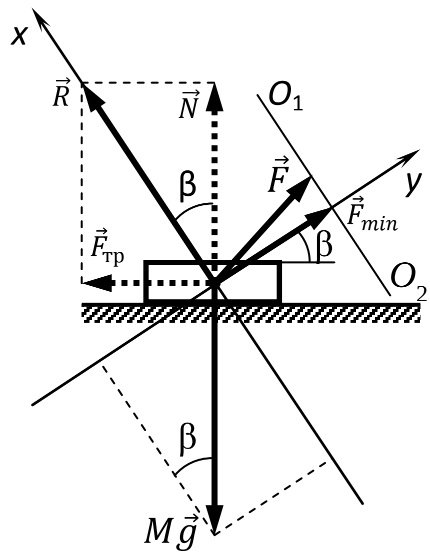
Задание 4. (15 баллов)

На горизонтальной плоской поверхности покоится однородная массивная плита массой M, которую необходимо сдвинуть вдоль горизонтальной плоскости, прикладывая к плите некоторую силу $\vec{F}$, направленную под углом α к горизонту (см. рис.).

Если выбрать самое удачное значение α, то сдвинуть плиту можно минимальной силой, модуль которой $F_{min} = 250\, H$. Какова масса M плиты? Коэффициент трения плиты о поверхность μ = 0,3, ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

Решение

Систему отсчёта, связанную с Землёй, будем считать инерциальной.



Пусть плита под действием силы $\vec{F}$ начинает движение вдоль горизонтальной плоскости.

На плиту M действуют (см. рисунок) сила тяжести $M\vec{g}$, силы $\vec{N}$ и $\vec{F}_{тр}$ со стороны горизонтальной плоскости и сила $\vec{F}$.

Когда плита движется, хотя бы и медленно, модуль силы трения скольжения $F_{тр} = \mu N$. Поэтому сила реакции опоры $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{тр}$ образует с вертикалью угол β, для которого $\operatorname{tg}\beta = F_{тр}/N = \mu$. Это значит, что при любой силе $\vec{F}$, пока плита касается опоры, направление силы $\vec{R}$ не меняется, хотя может изменяться её модуль. Направим по силе $\vec{R}$ ось x, а перпендикулярно ей – ось y декартовой системы координат. Тогда при медленном движении плиты (ускорение плиты $\vec{a} \to 0$)

$$\vec{F} + \vec{R} + M\vec{g} = 0,$$

откуда в проекциях на ось y получаем

$$F_y - Mg\sin\beta = 0.$$

Значит, при медленном движении плиты (так оно и есть при $\vec{F}_{min}$) $F_y = Mg\sin\beta = const$, и поэтому вершина вектора $\vec{F}$ при таком движении плиты всегда лежит на прямой O_1O_2, параллельной оси x и отстоящей от неё на расстояние $Mg\sin\beta$ в масштабе сил. Очевидно, что минимум $|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$, достигается, когда сила $\vec{F} = \vec{F}_{min}$ лежит на оси y, то есть когда $\vec{F} \perp \vec{R}$ и $F_x = 0$. При этом сила $\vec{F}_{min}$ образует с горизонталью угол $\beta = \operatorname{arctg}\mu$, а её модуль $F_{min} = F_y = Mg\sin\beta$.

Из тригонометрии известно, что

$$\sin\beta = \operatorname{tg}\beta \cdot \cos\beta = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta}}.$$

В нашем случае

$$\operatorname{tg}\beta = \mu, \qquad \sin\beta = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}, \qquad F_{min} = Mg \cdot \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}. \quad \text{\textit{Отсюда}} \quad M = \frac{F_{min} \cdot \sqrt{1+\mu^2}}{\mu g}.$$

Подставляя численные значения величин, получим

$$M = \frac{250 \cdot \sqrt{1 + 0{,}09}}{0{,}3 \cdot 10} \approx \frac{250 \cdot 1{,}044}{3} = 87 \text{ \textit{кг}}.$$

Ответ: $M \approx 87$ *кг*

Задание 5. (15 баллов)

Какие формы рельефа образуются под действием ветра и выветривания? В чём особенности их образования?

Выветривание и геологическая работа ветра относятся к экзогенным процессам. Они нередко проявляются вместе на открытых, лишенных растительности участках суши.
Выветриванием называют разрушение горных пород под действием физических, химических и биологических факторов. Геологическая работа ветра заключается в выдувании, обтачивании ветром горных пород, переносе разрушенных частиц и их отложении.
Интенсивный нагрев пород днём и охлаждение ночью, замерзание льда в трещинах, расклинивание корнями растений приводит к постоянному разрушению горных пород. А их неоднородность, разная прочность приводит к неравномерному разрушению, формированию ниш и козырьков, «башен» и «бастионов», останцов разной формы.
Ветер также участвует в формировании этих форм рельефа, выдувая мелкие частицы и механически обтачивая ими горные породы. Поскольку концентрация переносимых частиц выше в нижней части слоя воздуха, обтачивание там происходит сильнее и возникают грибообразные формы рельефа.
С работой ветра связано формирование аккумулятивных форм рельефа в пустынях (барханы, песчаные гряды и т.д.) и на берегах морей (дюны).
Полный ответ включает описание перечисленных форм рельефа и особенностей их образования. Образования речных долин, ледниковых форм, пещер не относится к процессам выветривания и эоловым, поэтому в ответе не учитываются.

Задание 6. (15 баллов)

Что изображено на фотографии? Как называются отдельные элементы этого геологического объекта? Как происходило их образование?

На фотографии изображена конусовидная вулканическая постройка. Данный *вулкан* относится к *центральному типу*, т.к. имеет единый центральный подводящий трубообразный канал (*жерло*), уходящий на глубину к *магматическому очагу*. По жерлу магма из очага движется к поверхности, теряет летучие вещества, превращаясь в лаву. На фотографии хорошо видна верхняя часть жерла – *кратер*. Это чашеобразное или воронкообразное углубление на вершине вулканического конуса, диаметром и глубиной десятки и сотни метров. Изливаясь из кратера, лава стекает по конусу вулкана, наращивая его вверх. В строении вулканической постройки помимо лавовых потоков участвуют рыхлые продукты извержений - *туфы*. Склоны вулкана покрыты глубокими оврагами, называемыми *барранкосами*. Справа от основного конуса наблюдается *побочный конус (паразитический)*, который возник на склоне вулкана при извержении через боковые трещины.