Заключительный этап
Всесибирской Открытой Олимпиады Школьников по физике
13 марта 2022 г.
Задачи 9 класса
Возможные решения (максимум 10 баллов за задачу)

1. Жарким летним днем ребята катались по озеру на плотике из легкого пластика. Когда на плотике было трое ребят, то плотик погружался в воду наполовину, когда на нем стало двенадцать – он оказался почти полностью под водой. Во сколько раз пластик плотика легче воды? Считать, что все ребята одинакового веса.

Возможное решение

1) Обозначим плотность пластика ρ, а плотность воды $\rho_ж$.

Тогда масса плотика $M=\rho V$, где V – объем плотика. <1 балл >

2) Пусть масса одного ребёнка m.

Условие равновесия плотика с тремя ребятами при погружении на половину объёма:

$3mg + \rho Vg - \rho_{ж} g \frac{V}{2} = 0$ <3 балла >

3) Условие равновесия плотика с двенадцатью ребятами при почти полном погружении:

$12mg + \rho Vg - \rho_{ж} gV = 0$ <3 балла >

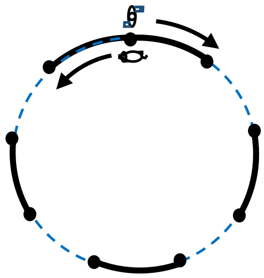
4) Умножая первое уравнение на 4 и вычитая из него второе, исключаем массу ребёнка:

$3\rho Vg - \rho_{ж} gV = 0$, откуда получаем ответ. <3 балла >

Ответ: $\rho_ж/\rho = 3$.

Разбалловка по этапам

	Этапы решения	Соотношения	Балл
1	Связь массы плотика с его плотностью и объемом.	$M=\rho V$	1
2	Условие равновесия плотика с тремя ребятами.	$3mg + \rho Vg - \rho_{ж} g \frac{V}{2} = 0$	3
3	Условие равновесия плотика с двенадцатью ребятами.	$12mg + \rho Vg - \rho_{ж} gV = 0$	3
4	Решение системы уравнений и получение ответа.	$3\rho Vg - \rho_{ж} gV = 0$ $\rho_ж/\rho = 3$	3



2. Круглый участок с периметром длиной L = 90 м окружен забором, который состоял из 9 одинаковых секций. Каждую четную секцию удалили. Однажды хозяин стал выгуливать собаку вдоль забора. У столба, находящегося между первой и последней секциями забора, он спустил собаку с поводка. Она пролезла через небольшую дыру в секции и побежала вдоль забора (с внутренней стороны) против часовой стрелки со скоростью u = 4,8 км/ч. Хозяин пошел (с внешней стороны забора) по часовой стрелке со скоростью v = 4,2 км/ч. Через какое время после старта хозяин впервые повстречается со своей собакой и возьмет ее на поводок? Разницей длины замкнутого пути внутри и вне забора пренебречь. Ответ привести в минутах.

Возможное решение

1) Предположим, что хозяин до встречи прошел путь $S_1 = nL + x$, где L =90 м – длина замкнутого пути вдоль забора, а его собака проделала $n+k$ замкнутых кругов, ее путь до встречи $S_2 = (n+k+1)L - x$, <2 балла>

2) оба затратили одно и то же время t: $\dfrac{nL+x}{v} = \dfrac{(n+k+1)L-x}{u}$. Подставив значения скорости, получим $x = \dfrac{4,2(1+k)-0,6n}{9}L$. <3 балла>

3) Для того, чтобы хозяин нашел свою собаку, целая часть от деления x на длину секции l должна быть нечетным числом: $x/l = 4,2(1+k) - 0,6n$. При n=0, k=0, $x/l = 4,2$ целая часть $\lfloor x/l \rfloor = 4$, при n=1, k=0, $x/l = 3,6$, $\lfloor x/l \rfloor = 3$, условие удовлетворяется. <3 балла>

Пара $n=1, k=0$ подходит для условий задачи. Время, через которое собака пробежала бы на круг больше, чем прошел хозяин, можно найти из условия:

$ut_1 - vt_1 \geq L$, т.е. $t_1 \geq \dfrac{L}{u-v}$, а $n \geq \dfrac{v}{u-v}$. В условиях задачи получается n≥7, т.е при n<7 k=0.

Можно также заметить, что к моменту, когда хозяин пройдёт ровно 7 кругов, собака пробежит ровно 8, и они окажутся одновременно в точке старта. Картина станет начальной, т.е. искать решение для k>0 не имеет смысла.

Искомое время $t = \dfrac{L+x}{v} = \dfrac{1,4L}{v} = 1,8$ мин.

Ответ: t = 0,03 час =1,8 мин. <2 балла>

Разбалловка по этапам

	Этапы решения	Соотношения	Балл
1	Определение пути до встречи хозяина и его собаки	$S_1 = nL + x$, $S_2 = (n+k+1)L - x$	2
2	Определение места встречи из условия равенства времени движения	$x = \dfrac{4,2(1+k)-0,6n}{9}L$	3
3	Исследование возможных мест встречи на предмет попадания на отсутствующую секцию забора	Нечетная целая часть: $\lfloor x/l \rfloor = 3$ при n=1, k=0	3
4	Получение ответа	$t = \dfrac{L+x}{v} = 1,8$ мин = 0,03 час	2

3. Автомобиль вначале разгонялся из неподвижного состояния с постоянным ускорением, а затем двигался с достигнутой максимальной скоростью *V*. Средняя скорость при этом равна *u*. Какую часть времени автомобиль двигался равноускоренно?

Возможное решение

1) Обозначим полное время движения *T*, время равноускоренного движения *t*. Введем ускорение *a*, тогда максимальная скорость равна $V = at$ <1 балл>.

2) Полный пройденный путь будет $S = at^2/2 + V(T-t) = at(T-t/2)$ <3 балла>.

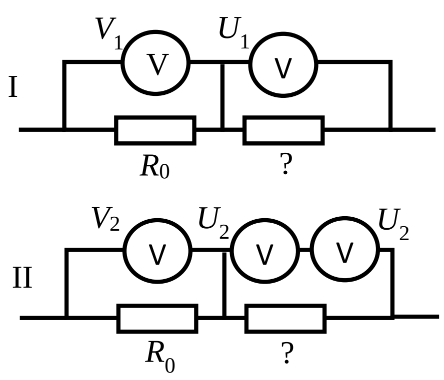
3) Средняя скорость движения автомобиля $u = S/T$ <1 балл>.

4) Удобно написать отношение $\frac{u}{V} = \frac{T-t/2}{T} = 1 - \frac{t}{2T}$, откуда вычисляется искомая величина <3 балла>.

Ответ: $t/T = 2(1-u/V)$ <2 балла>.

Разбалловка по этапам

	Этапы решения	Соотношения	Балл
1	Определение максимальной скорости	$V = at$	1
2	Определение полного пройденного пути	$S = at^2/2 + V(T-t) = at(T-t/2)$	3
3	Определение средней скорости	$u = S/T$	1
4	Определение отношения средней скорости к максимальной скорости	$\frac{u}{V} = \frac{T-t/2}{T} = 1 - \frac{t}{2T}$	3
5	Получение ответа	$t/T = 2(1-u/V)$	2



4. В распоряжении инженера имелись три одинаковых вольтметра. Для того, чтобы измерить сопротивление резистора, включенного в схему последовательно с резистором с сопротивлением R_0 = 1000 Ом, инженер сделал два измерения. В первом случае он подключил вольтметры по схеме I (см. рисунок), а во втором – по схеме II. В первом случае вольтметры показывали, соответственно, $V_1 = 10$ В и $U_1 = 34$ В, во втором - $V_2 = 9$ В и $U_2 = 17$ В. Определите сопротивление неизвестного резистора. Вольтметры неидеальные (имеют конечное сопротивление).

Возможное решение

1) Обозначим внутреннее сопротивление вольтметра *r*, сопротивление неизвестного резистора *R*. При первом измерении сумма токов через резистор R_0 и первый вольтметр равна сумме токов через *R* и второй вольтметр:

$\frac{V_1}{R_0}+\frac{V_1}{r}=\frac{U_1}{R}+\frac{U_1}{r}$. <3 балла> Подставив значения напряжений и приведя к общему знаменателю, получим

$$5(R_0+r)R=17(R+r)R_0 \qquad (1)$$

2) При втором измерении сумма токов через резистор R_0 и первый вольтметр равна сумме токов через *R* и два остальных вольтметра:

$\frac{V_2}{R_0}+\frac{V_2}{r}=\frac{2U_2}{R}+\frac{U_2}{r}$ <3 балла>,

после аналогичных действий

$$9(R_0+r)R=17(R+2r)R_0 \qquad (2)$$

3) Приравняв значение $r=\frac{12RR_0}{5R-17R_0}$ из уравнения (1) значению $r=\frac{8RR_0}{9R-34R_0}$ из уравнения (2), получим $12(9R-34R_0)=8(5R-17R_0)$ <2 балла>, откуда находим ответ $R=4R_0=4000$ Ом.

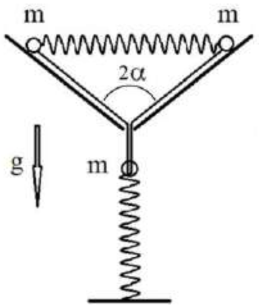
Ответ: $R=4000$ Ом. <2 балла>

Ответ через формальные величины, введенные в условии задачи:

$$R=R_0\frac{2U_2(V_1-U_1)-U_1(V_2-U_2)}{V_2(V_1-U_1)-V_1(V_2-U_2)}$$

Разбалловка по этапам

	Этапы решения	Соотношения	Балл
1	Равенство входящего и выходящего тока через узел, соединяющий два резистора при двух вольтметрах	$\frac{V_1}{R_0}+\frac{V_1}{r}=\frac{U_1}{R}+\frac{U_1}{r}$	3
2	Равенство входящего и выходящего тока через узел, соединяющий два резистора при трех вольтметрах	$\frac{V_2}{R_0}+\frac{V_2}{r}=\frac{2U_2}{R}+\frac{U_2}{r}$	3
3	Получение уравнения для искомой величины	$12(9R-34R_0)=8(5R-17R_0)$	2
4	Получение ответа	$R=4000$ Ом	2



5. В закрепленной конусообразной воронке с углом 2α при вершине расположены два шарика малого размера, соединенных пружиной жесткостью *k*. К шарикам прикреплена нить, которая проходит через отверстие в вершине конуса и серединой прикреплена к такой же пружине, зафиксированной снизу и расположенной вертикально (см. рисунок). Нить не провисает. Массы шариков *m*. Система находится в равновесии. На верхний конец нижней пружины прикрепляют шарик массой *m*. Насколько сожмется нижняя пружина в состоянии нового равновесия? Ускорение свободного падения *g*. Ось воронки вертикальна, а шарики расположены горизонтально, нить невесомая и нерастяжимая. Трения нет.

Возможное решение

1) Пусть в начальном состоянии верхняя пружина была сжата на x_0, нижняя растянута на y_0 (обе величины положительны), а сила натяжения нити T_0. Баланс сил, действующих на верхний шарик вдоль поверхности воронки $mg\cos\alpha + T_0 - kx_0\sin\alpha = 0$ <2 балла>

2) Баланс сил, действующих на точку крепления нити и пружины $2T_0 - ky_0 = 0$.<1 балл>

Исключаем из уравнений T_0:

$mg\cos\alpha + 0{,}5ky_0 - kx_0\sin\alpha = 0$. (1)

3) После добавления третьего шарика нижняя пружина сожмётся на *Δy*, верхняя на *Δx*, а сила натяжения нити станет T_1. Баланс сил, действующих на верхний шарик после установления равновесия: $mg\cos\alpha + T_1 - k(x_0 + \Delta x)\sin\alpha = 0$.

4) Баланс сил, действующих на третий шарик, будет $2T_1 - k(y_0 - \Delta y) - mg = 0$ <2 балла>

Исключаем из уравнений T_1:

$mg\cos\alpha + 0{,}5k(y_0 - \Delta y) + 0{,}5mg - k(x_0 + \Delta x)\sin\alpha = 0$. (2)

Вычтем из уравнения (2) уравнение (1): $-0{,}5k\Delta y + 0{,}5mg - k\Delta x\sin\alpha = 0.$ (3) <1 балл>

5) Запишем условие, следующее из того, что нить нерастяжимая:

$\Delta y = \dfrac{\Delta x}{2\sin\alpha}$. (4) <2 балла>

Решая уравнения (3) и (4) получим ответ.

Ответ: $\Delta y = \dfrac{mg}{k(1 + 4\sin^2\alpha)}$ <2 балла>

Разбалловка по этапам

	Этапы решения	Соотношения	Балл
1	Баланс сил, действующих на верхний шарик вдоль поверхности воронки	$mg\cos\alpha + T_0 - kx_0\sin\alpha = 0$,	2
2	Баланс сил, действующих на точку крепления нити и нижней пружины	$2T_0 - ky_0 = 0$	1
3	Баланс сил, действующих на нижний шарик	$2T_1 - k(y_0 - \Delta y) - mg = 0$	2
4	Уравнение, связывающее изменения длин пружин	$-0{,}5k\Delta y + 0{,}5mg - k\Delta x\sin\alpha = 0.$	1
5	Условие нерастяжимости нити	$\Delta y = \dfrac{\Delta x}{2\sin\alpha}$	2
6	Получение ответа	$\Delta y = \dfrac{mg}{k(1 + 4\sin^2\alpha)}$	2