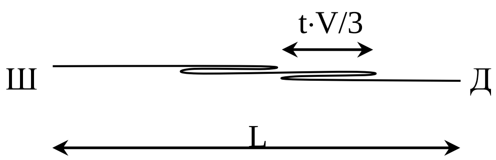
Заключительный этап
Всесибирской Открытой Олимпиады Школьников по физике
13 марта 2022 г.
Задачи 7 класса
Возможные решения (максимум 10 баллов за задачу)

1. Если школьнику по дороге из школы домой никто не позвонит, то он приходит домой в 14-00. Но в один из дней ему начали звонить друзья и каждый раз, когда школьник доставал телефон, у него из кармана выпадал носовой платок и падал на асфальт. Школьник замечал это тогда, когда заканчивался разговор по телефону, разворачивался и шел за платком. Подняв платок, школьник убирал его в тот же карман и продолжал путь домой. И так повторилось несколько раз. *Сколько* всего минут продолжались телефонные разговоры, если из-за них в этот день школьник пришел домой только в 14-16? Известно, что школьник во время телефонного разговора уменьшает скорость своего движения втрое, а все разговоры были короче, чем промежутки между ними.

Решение: Введем обозначения, которые будут использованы при записи соотношений, связывающих разные величины из задачи. Пусть T_x - искомая длительность всех разговоров в минутах, V - скорость движения школьника, когда он не разговаривает по телефону. Еще введем L - расстояние между школой и домом.

Для лучшего понимания происходящего в задаче изобразим траекторию школьника для двух разговоров. Для примера указано, что второй отрезок имеет длину tV/3, где t - время разговора по телефону в этот раз. Это значит, что на такое расстояние школьнику приходится возвращаться за платком и обратно в точку, где этот разговор закончился.

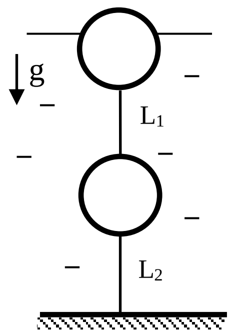


Полное расстояние, которое проходит школьник за все время разговоров - $T_x \cdot V/3$ (+2 балла). Если бы ему не позвонили, то он бы прошел это расстояние за $T_x/3$, т.е. на $2T_x/3$ быстрее (+1 балл). Возвращаясь за платком, школьник прошел лишнее расстояние $2T_x \cdot V/3$ (+1 балл), и потребовалось ему на это время $(2T_x \cdot V/3)/V=2T_x/3$ (+1 балл). Заметим, что, согласно условию, ему не звонили, пока он не подобрал платок и не прошел точку, в которой прекратился предыдущий разговор.

Таким образом, в рассматриваемый день школьник потратил дополнительное время, равное $2T_x/3+2T_x/3=4T_x/3=16$ мин (+2 балла).

Значит, искомое время разговоров составляет примерно $T_x=12$ мин (+3 балла за явно сформулированный и корректно полученный ответ).

2. Между двумя одинаковыми поплавками вставляют резинку. Еще одну точно такую же резинку прикрепляют к одному из поплавков с другой стороны и погружают всю конструкцию в жидкость (см. рисунок). При этом верхний поплавок погружен на 75% своего объема. Длина верхней резинки в растянутом состоянии равна $\mathbf{L_1}$, длина растянутой нижней резинки - $\mathbf{L_2}$. Из-за маленькой дырочки нижний поплавок полностью заполнился жидкостью, после чего верхний поплавок



погрузился в жидкость целиком. Какова стала теперь длина нижней резинки? Считать, что у поплавков стенки очень тонкие, а внутри - пустота.

Решение:
Введем обозначение **V** для объема одного поплавка, ρ - для плотности жидкости, L_0 - для длины нерастянутой резинки, L_X - для искомой длины растянутой нижней резинки после полного погружения верхнего поплавка в жидкость.
Так как очень тонкие стенки подразумевают очень малую массу поплавка (плотность любого материала конечна), то условие равновесия верхнего поплавка в начальной ситуации имеет вид

$$\frac{3}{4} \cdot V \cdot \rho \cdot g = k \cdot (L_1 - L_0) \quad (+1 \text{ балл})$$

Условие равновесия нижнего поплавка в начальной ситуации имеет вид

$$V \cdot \rho \cdot g + k \cdot (L_1 - L_0) = k \cdot (L_2 - L_0) \quad (+2 \text{ балла})$$

Из этих двух уравнений получаем, что

$$\frac{3}{4} k \cdot (L_2 - L_1) = k \cdot (L_1 - L_0),$$

т.е. $L_0 = \dfrac{7L_1 - 3L_2}{4}$ (+2 балл)

После заполнения пустотелого поплавка жидкостью силы натяжения обеих резинок становятся одинаковыми (+1 балл), а условие равновесия верхнего поплавка становится таким:

$$V \cdot \rho \cdot g = k \cdot (L_X - L_0) \quad (+1 \text{ балл})$$

Используя первое уравнение и выражение для L_0, получаем

$$L_X = \frac{3L_1 + L_2}{4}$$

(+3 балла за явно сформулированный и корректно полученный ответ).

3. Из карьера на фабрику на грузовиках непрерывно возят руду по длинной дороге. После разгрузки пустая машина сразу едет обратно в карьер. Чуть меньше трети всего пути проходит по длинному мосту, который может выдержать вес не более 6 машин с рудой, либо 19 пустых машин. Какое максимальное число грузовиков надо одновременно направить на такие перевозки, чтобы машины не простаивали и на всем пути ехали с постоянной скоростью? Известно, что разрешенная скорость пустого грузовика равна $V_П$=60 км/ч, а груженого - $V_Г$=36 км/ч. Считать, что на всём пути встречные машины легко разъезжаются, временем погрузки и разгрузки можно пренебречь, и что в одну сторону всегда едет одно и то же количество машин.

Решение: Введем обозначения, которые будут использованы при записи соотношений, связывающих разные величины из задачи. Пусть L - длина всего пути от фабрики до карьера, N - искомое количество всех машин (очевидно, целое), $N_П$ - число пустых машин, которые едут от фабрики в карьер, $N_Г$ - число груженых машин, которые едут обратно, $N_П+N_Г=N$. Пусть $M_П$ и $M_Г$ - массы пустой и груженой машины, соответственно.

Сначала заметим, что при равномерном темпе работы в любом месте пути количество машин, проехавших за одно и то же время в сторону фабрики, равно числу машин, проехавших в другую сторону. В противном случае где-то возникнет нехватка или избыток машин (+1 балл).

Такое равенство потоков машин выражается соотношением

$$\frac{L/N_П}{V_П}=\frac{L/N_Г}{V_Г}$$

или

$$\frac{N_Г}{N_П}=\frac{V_П}{V_Г}=\frac{60}{36}=\frac{5}{3},$$

т.е. $N_Г = N\cdot\frac{V_П}{V_Г+V_П}=\frac{5}{8}N$ (+1 балл)

$N_П = N\cdot\frac{V_Г}{V_Г+V_П}=\frac{3}{8}N$ (+1 балл)

Поскольку мост занимает примерно треть всего пути, по нему едут одновременно не больше $N_П/3$ пустых машин и $N_Г/3$ груженых машин. Груженая машина весит примерно в 19/6 раза больше пустой, $19M_П/6=M_Г$ (+1 балл), т.е. можно сказать, что общий вес всех машин на мосту не будет больше, чем

$M_П\cdot N_П/3+ M_Г\cdot N_Г/3= (M_П\cdot N_П+19M_П/6\cdot N_П\cdot 5/3)/3=M_П\cdot N_П(1+95/18)/3$ (+1 балл).

Согласно условию задачи, по мосту может ехать ограниченное число машин, т.е.

$M_П\cdot N_П(113/54)\le 19M_П$, т.е. $N_П\le 9.07$ (+1 балл).

Аналогично можно убедиться, что для числа груженых машин верно соотношение

$M_П\cdot N_П/3+ M_Г\cdot N_Г/3= (6M_Г/19\cdot 3N_Г/5+M_Г\cdot N_Г)/3=M_Г\cdot N_Г(1+18/95)/3$

$M_Г\cdot N_Г(113/297)\le 6M_Г$, т.е. $N_Г\le 15.7$ (+1 балл).

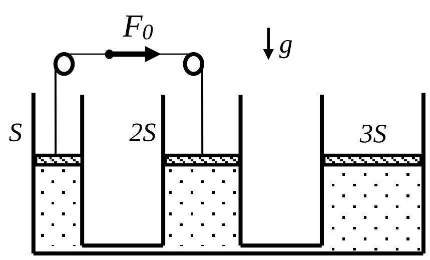
Отсюда следует, что максимальные значения $N_П=9$, $N_Г=15$,

$N=24$ (+3 балла за явно сформулированный и корректно полученный ответ).

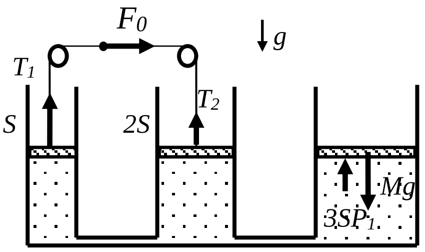
Заметим, что поскольку расстояние между гружеными машинами получается L/15 (при условии целого количества машин одного типа), т.е. между 6-ю машинами получается расстояние 5L/15= L/3, что чуть длиннее, чем мост, т.е. на мосту может быть только 5 груженых машин. Можно добавить еще 3 пустых (4 пустых весят уже больше одной груженой). Между 4-мя пустыми машинами - расстояние 3L/9=L/3, т.е. на мосту не будет больше машин, чем можно.

Если верный ответ получен простым подбором численных значений, то всего ставится 7 баллов. Если формально верный ответ дан, исходя из условия целочисленности $N_П$ и $N_Г$ без проверки на пропускную способность моста, то всего ставится не более 3-х баллов.

4. Имеется три сообщающихся сосуда, в которые налита жидкость с плотностью ρ. Сосуды перекрыты подвижными тяжелыми поршнями с площадью сечения S, $2S$ и $3S$ (см. рисунок). Два меньших поршня соединены нитью, перекинутой через блоки. Все поршни удерживаются в равновесии на одном и том же уровне, когда к этой нити дополнительно приложена внешняя сила, равная F_0, как показано на рисунке. Величину этой внешней силы медленно увеличивают вдвое. На какое расстояние из-за этого сместится *самый* большой поршень? Внешним давлением пренебречь, массы поршней можно считать одинаковыми, нить невесома, нерастяжима и всегда остается натянутой.

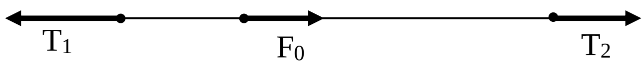


Решение: Для использования в промежуточных вычислениях обозначим силы, действующие на меньший и средний поршни в начальной ситуации, как T_1 и T_2, соответственно. Начальное давление под каждым поршнем - как P_1, масса поршня - M. После увеличения внешней силы до $2F_0$ натяжения участков нитей до и после точки приложения обозначим, как T_3 и T_4. Искомое смещение поршня площадью $3S$ обозначим X, а сопутствующие смещения других поршней - как y.



Условие равновесия нити в начальной ситуации выражается уравнением (натяжение свободного участка невесомой нити одинаково вдоль всего участка):

$F_0=T_1-T_2$ (+1 балл)



Для поршней, слева направо, равновесие определяется равенствами (все силы показаны только для третьего поршня):

$T_1 = Mg- P_1S$ (+1 балл за условие равновесия всех поршней)

$T_2= Mg-2SP_1$

$0= Mg -3P_1S$

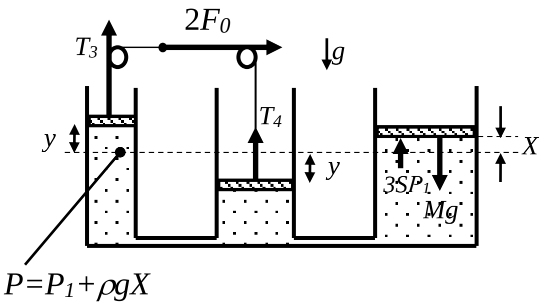
Из последнего уравнения следует, что под большим поршнем в равновесии всегда одно и то же давление, равное P_1 (+1 балл).

Используя эти уравнения, можно получить упрощенную связь между параметрами задачи:

$F_0=T_1-T_2 =P_1S=Mg/3$

После увеличения внешней силы условия равновесия приобретут вид

$2F_0=T_3-T_4$



Для поршней, слева направо, равновесие определяется равенствами (все силы показаны только для третьего поршня):

$T_3 = Mg - S(P_1+\rho g(X-y))$ (+2 балла)

$T_4= Mg - 2S(P_1+\rho g(X +y))$ (+2 балла)

Здесь учтено, что под большим поршнем давление всегда равно P_1, что давление в жидкости при увеличении глубины на X возрастает на ρgX, и что смещения малого и среднего поршней одинаковы по величине вследствие нерастяжимости нити.

Вследствие сохранения объема жидкости связь между смещениями поршней имеет вид

$yS+3SX=2Sy$, откуда получаем, что $y=3X$ (+1 балл).

Проводя преобразования, получаем:

$2F_0=T_3-T_4 =P_1S +\rho gS(3y+X) =F_0 +10\rho gSX$

Таким образом,

$$X = \frac{F_0}{10\rho gS}$$

(+2 балла за явно сформулированный и корректно полученный ответ).

Задача не считается решенной, если приводится только ответ!

Желаем успеха!