

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике
2021-2022 гг

Заключительный этап

11 класс

Время написания работы 4 астрономических часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Десятичная запись натурального числа N содержит каждую цифру от 0 до 9 ровно один раз. Обозначим через A сумму пяти двузначных чисел, составленных из первой и второй, третьей и четвёртой, ..., девятой и десятой цифр N , а через B – сумму четырёх двузначных чисел, составленных из второй и третьей, четвёртой и пятой, ..., восьмой и девятой цифр N . Оказалось, что A равно B , может ли N начинаться с чётной цифры?

11.2. Найти все решения в действительных числах системы уравнений

$$x(1 + yz) = 9, y(1 + xz) = 12, z(1 + xy) = 10.$$

11.3. Перестановка чисел $1, 2, 3, \dots, n$ в некотором порядке называется *забавной*, если в ней каждое число, начиная со второго слева, либо больше всех чисел, стоящих левее него, либо меньше всех чисел, стоящих левее него. Например, перестановка $3, 2, 1, 4, 5, 6$ является забавной, а перестановка $3, 1, 2, 4, 5, 6$ – нет. Найти количество всех различных забавных перестановок чисел $1, 2, 3, \dots, n$.

11.4. Пусть H – точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC , точка M – середина стороны AC . Из стороне AB выбрана точка K такая, что прямая BH делит отрезок CK пополам. Доказать, что отрезки MH и CK перпендикулярны.

11.5. Доказать, что для любых действительных чисел x, y, z из

интервала $[0, 1]$ выполнено неравенство
$$\frac{x+y}{2+z} + \frac{x+z}{2+y} + \frac{y+z}{2+x} \leq 2.$$