

**Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике
2021-2022 гг.**

Дополнительный отборочный этап

11 класс

Все задачи оцениваются из 7 баллов

11.1. Найти множество всех точек M координатной плоскости, для которых существует отрезок ненулевой длины, концы которого лежат на графике функции $y = \frac{1}{x}$, а середина совпадает с M .

11.2. В описанном четырёхугольнике $ABCD$ величины углов CDA , DAB и ABC равны 90° , 120° и 120° соответственно, а длина стороны BC равна 1 см. Найти длину стороны AB .

11.3. Каждая клетка квадратной доски размера n на n окрашена в синий или красный цвет. Строка или столбец называются синеватой, если в ней синих клеток больше, чем красных. Соответственно, строка или столбец называются красноватой, если в ней красных клеток больше, чем синих. Какое максимальное значение может принимать сумма числа красноватых строк и числа синеватых столбцов при некоторой раскраске доски в зависимости от n ?

11.4. Доказать, что, если для некоторых натуральных чисел x, y число $x \cdot y \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$ целое, то оно делится на 60.

11.5. Действительные числа $x < y < z$ таковы, что $x + y + z = 6$ и $xy + yz + xz = 9$. Докажите, что тогда $0 < x < 1 < y < 3 < z < 4$.