Всесибирская открытая олимпиада школьников
по математике 2021-2022 гг.
Заключительный этап
10 класс

Время написания работы 4 астрономических часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. На шахматной доске 8 на 8 отмечены две произвольные клетки. Верно ли, что доску всегда можно разрезать по линиям сетки на две одинаковых части, каждая из которых содержит по одной отмеченной клетке?

10.2. Найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять натуральные числа x, y, z такие, что можно записать по кругу в некотором порядке $x \geq 1$ раз букву A, $y \geq 1$ раз букву B и $z \geq 1$ раз букву C так, чтобы никакие две одинаковые буквы не были написаны рядом (не были соседними).

10.3. Треугольник ABC равнобедренный, с равными сторонами AC и BC. На дуге BC его описанной окружности, не содержащей вершину A, отметим произвольную точку D, отличную от B и C. Обозначим за E точку пересечения прямых CD и AB. Доказать, что прямая BC касается описанной окружности треугольника BDE.

10.4. Пусть для действительных чисел x, y, z , выполннено неравенство: $x + y + z \geq xyz$. Доказать, что для них выполнено и неравенство $x^2 + y^2 + z^2 \geq xyz$.

10.5. Какие натуральные числа n можно представить в виде $n = [a,b] + [a,c] + [b,c]$ для некоторых натуральных a, b, c ? Здесь $[x, y]$ обозначает наименьшее общее кратное натуральных чисел x и y.