Решения заданий первого этапа
Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике 2021-2022 гг.

Решения всех заданий оцениваются из 7 баллов

9 класс

9.1. Пусть числа x, y, u, v различны и выполнено соотношение $\frac{x+u}{x+v}=\frac{y+v}{y+u}$. Найдите все возможные значения суммы $x+y+u+v$.

Ответ. $x+y+u+v=0$.

Решение. Приведём разность левой и правой частей выражения из условия, равную нулю, к общему знаменателю и разложим числитель на множители:
$$\frac{x+u}{x+v}-\frac{y+v}{y+u}=\frac{xu+yu+u^2-yv-xv-v^2}{(x+v)(y+u)}=\frac{(x+y)(u-v)+(u+v)(u-v)}{(x+v)(y+u)}=\frac{(x+y+u+v)(u-v)}{}.$$
Следовательно, числитель дроби равен 0, а разность $u-v$ не равна 0 по условию, поэтому равна 0 первая скобка, то есть сумма $x+y+u+v$.

Критерии проверки. В рассуждениях не упомянуто явно, что разность $u-v$ не равна 0: минус 2 балла.

9.2. Представить число 100 в виде суммы максимально возможного количества различных попарно взаимно простых натуральных чисел. Пояснение: условие означает, что наибольший общий делитель любых двух чисел, использованных в сумме, равен 1.

Ответ. 100 является суммой всех девяти первых простых чисел от 2 до 23 включительно.

Решение. Действительно, $100=2+3+5+7+11+13+17+19+23$, количество слагаемых – 9 - при этом максимально возможное. Если бы сто являлось суммой не менее, чем десяти различных попарно взаимно простых натуральных чисел, то в силу попарной взаимной простоты простые множители у любых двух из них были бы различны. Оставив от каждого не равного 1 числа любой его простой делитель, мы бы получили десять или больше различных чисел, каждое из которых простое кроме, возможно одного, равного 1, сумма которых не превосходит 100. Последнее невозможно. поскольку сумма десяти наименьших простых чисел равна 2+3+5+7+11+13+17+19+23+29=129>100. а сумма 1 и девяти наименьших простых чисел равна 1+2+3+5+7+11+13+17+19+23=101>100.

Критерии проверки. Приведён пример 2+3+5+7+11+13+17+19+23=100: 3 балла.
Доказана максимальность примера: 4 балла. Итого 7 баллов.
При оценке не рассматривается случай, когда одно из чисел равно единице: минус 2 балла. Все ссылки на пример, как на «наилучший случай» при попытках обосновании максимальности: 0 баллов за обоснование.

9.3. В выпуклом четырёхугольнике ABCD обозначим за P и R середины сторон AB и CD соответственно, а за Q и S - середины диагоналей BD и AC соответственно. Докажите, что, если отрезки PR и QS перпендикулярны, то длины сторон BC и AD четырёхугольника равны.

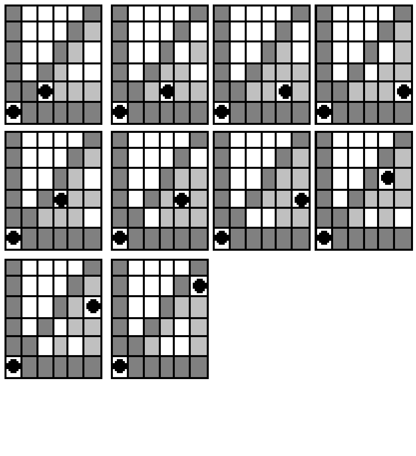
Доказательство. Отрезки PQ и RS являются средними линиями в треугольниках ABD и ACD соответственно, поэтому они параллельны стороне AD и между собой, а их длины равны половине длины AD. Аналогично, отрезки PS и QR являются средними линиями в треугольниках ABC и DBC соответственно, поэтому они параллельны стороне BC и между собой, а их длины равны половине длины BC. Следовательно, четырёхугольник PQRS является параллелограммом с перпендикулярными диагоналями PR и QS. Хорошо известно, что такой параллелограмм является ромбом, а все стороны ромба равны, поэтому стороны AD и BC исходного четырёхугольника ABCD равны удвоенным длинам сторон PQ и PS ромба, то есть равны между собой.

Критерии проверки. Показано, что PQRS является параллелограммом: 2 балла.
Доказывать, что параллелограмм с перпендикулярными диагоналями является ромбом в решении не обязательно.

9.4. В окружности провели несколько различных хорд таким образом, что каждая из них проходит через середину хотя бы одной другой хорды. Докажите, что все проведённые хорды являются диаметрами окружности.

Доказательство. Рассмотрим отрезки, соединяющие центр окружности О с серединой каждой хорды, по известному свойству они являются серединными перпендикулярами к хордам а их длины равны расстояниям от О до хорд. Последнее означает, что расстояние от О до любой точки хорды, отличной от её середины, будет больше длины такого отрезка.
Допустим, не все проведённые хорды являются диаметрами окружности. Рассмотрим l - любую из хорд, для которой расстояние от центра максимально среди всех таких расстояний, оно не равно 0 по предположению. По условию, l пересекает некоторую другую хорду m в её середине М. Если М отлична от середины хорды l.. то длина ОМ, равная расстоянию от О до m, больше расстояния от О до l, что противоречит выбору l.
Если середины хорд l и m совпадают, то совпадают и сами хорды, так как ОМ будет их общим серединным перпендикуляром – снова противоречит тому, что все хорды по условию различны. Именно здесь использовано предположение о том, что не все хорды. а конкретно l и m, являются диаметрами окружности, для них ОМ – отрезок, а не точка.
Критерии проверки. Идея рассмотрения самой удалённой от центра хорды l: 3 балла.
Доказательство того, что середины хорд l и m должны совпадать: 2 балла.
Доказательство того, что, если середины хорд l и m, не являющихся диаметрами, совпадают, то и сами хорды совпадают: 2 балла.
Если в рассуждениях нет явного пояснения, как использовано то, что рассматриваемые хорды – не диаметры: минус 1 балл.

9.5. В какое наименьшее число цветов можно окрасить все клетки квадрата 6 на 6 так, чтобы в каждой горизонтали, вертикали и диагонали квадрата все клетки имели разный цвет? Пояснение: под диагональю квадрата понимаются все ряды из не менее, чем двух клеток, идущие диагонально от одного края квадрата до другого под углом 45° или 135° к горизонтали.
Ответ. В 7 цветов.
Решение. Приведём пример раскраски в 7 цветов, удовлетворяющей условию задачи. Рассмотрим квадрат 7 на 7, и окрасим его требуемым образом в 7 цветов с помощью известного приёма: окраска каждой следующей горизонтали получается из раскраски предыдущей циклическим сдвигом на 2 клетки. Затем выберем в нём левый нижний угловой квадрат 6 на 6, это и будет требуемый пример.
Докажем минимальность 7 цветов. Каждая горизонталь квадрата содержит 6 клеток, поэтому для корректной раскраски потребуется не менее 6 цветов. Предположим, что нам удалось выкрасить квадрат в 6 цветов требуемым в условии образом, тогда клеток каждого цвета будет ровно 6 и располагаться они будут все в различных вертикалях и горизонталях квадрата. Назовём цвет, в который окрашена левая нижняя угловая клетка А квадрата чёрным, и покажем, что оставшиеся 5 чёрных клеток не могут располагаться в правом верхнем квадрате 5 на 5 в разных вертикалях и горизонталях и при этом не лежать на его главной диагонали, уже контролируемой клеткой А. В противном случае можно считать, что не меньше трёх из них располагались бы ниже главной диагонали в фигуре «лесенка» из 10 клеток, состоящей из 4 полосок по 4,3,2,1 клеток соответственно. Однако непосредственно проверяется, что для любой клетки «лесенки» клетки, не находящиеся с окрашенной в одной горизонтали, вертикали или горизонтали могут корректно содержать ещё не более одной чёрной клетки. Возможные положения этой второй чёрной клетки рассмотрены на рисунке. Клетки, контролируемые ей, окрашены светло-серым цветом.
Следовательно. раскрасить квадрат 6 на 6 требуемым образом в условии образом в 6 цветов невозможно.



Критерии проверки. Любой явный и правильный пример на 7 цветов: 3 балла. Его правильность при этом можно не доказывать.
Замечено, что цветов должно быть не меньше 6: 1 балл.
Доказано, что цветов должно быть не меньше 7: 4 балла.