Решения заданий заключительного этапа
Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике 2021-2022 гг.
Решения всех заданий оцениваются из 7 баллов
9 класс

9.1. Назовём четырёхзначное число $\overline{abcd}$ *любопытным*, если сумма двузначных чисел $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ равна двузначному числу $\overline{bc}$. Например, число 1978 любопытное, так как 19+78=97. Найти количество любопытных чисел.

Ответ. 36.

Решение. Составим уравнение $\overline{ab}+\overline{cd}=10(a+c)+b+d=\overline{bc}=10b+c$, откуда $10a+9c+d=9b$. Разность $9(b-c)$ делится на 9, значит и сумма $10a+d=9(b-c)$ делится на 9, что равносильно делимости на 9 суммы $a+d=9(b-c-a)$. Сумма двух различных чисел из интервала от 0 до 9 не меньше 1 и не больше 17. поэтому последнее возможно только при $a+d=9$. Подставим это в предыдущее уравнение, получим $b=a+c+1$, следовательно четвёрка (a,b,c,d) может быть записана в виде $(a,a+c+1,c,9-a)$, где a,c- любая пара цифр, удовлетворяющих соотношениям $a\geq 1, a+c\leq 8$. При каждом фиксированном $a=1,2,...,8$ значение c может быть любым от 0 до $8-a$, всего $9-a$ вариантов. Следовательно, общее количество любопытных чисел равно сумме 8+7+…+1=36.

Критерии проверки. . (●) Доказано, что $a+d=9(b-c-a)$ делится на 9: 2 балла. . (●) Доказано, что отсюда следует $a+d=9$: ещё 2 балла. . (●) Записан вид четвёрки цифр как $(a,a+c+1,c,9-a)$: ещё 1 балл. . (●) Найдено количество любопытных четвёрок: 2 балла.

9.2.. Даны натуральные числа a,b,c. Доказать, что, как минимум одно из трёх чисел $a^2+b+c, b^2+a+c, c^2+a+b$ не является точными квадратом, то есть квадратом натурального числа.

Доказательство. В силу симметрии можно считать, что $a\leq b\leq c$. Тогда $c^2<c^2+a+b\leq c^2+2c<(c+1)^2$, следовательно c^2+a+b заключено между квадратами последовательных чисел c^2 и $(c+1)^2$, то есть само не может быть точным квадратом.

Критерии проверки. . (●) За отсутствие объяснений, почему из неравенства $c^2<c^2+a+b\leq c^2+2c<(c+1)^2$ следует, что c^2+a+b не может быть точным квадратом оценка не снижается.

9.3. Рассматриваются всевозможные разбиения шахматной доски 8 на 8 на домино из двух соседних по стороне клеток. Определить максимальное натуральное n такое, что для любого разбиения доски 8 на 8 на домино можно найти некоторый прямоугольник, составленный из n клеток доски, не содержащий ни одного домино целиком. Длины сторон прямоугольника в клетках могут равняться любым натуральным числам, начиная с единицы.

Ответ. $n=4$.

Решение. 1) Докажем, что $n \le 4$. Рассмотрим следующее разбиение шахматной доски 8 на 8 на домино. Разобьём доску на квадраты 2 на 2 клетки, окрасим каждый из их в красный и синий цвета в шахматном (относительно доски 4 на 4) порядке, и разобьём красные квадраты на пары горизонтальных домино, а синие – на пары вертикальных домино. Любой прямоугольник площади больше 4 либо содержит в себе прямоугольник 1 на 5 клеток, либо прямоугольник 2 на 3 клетки. Легко убедиться в том, что для рассматриваемого разбиения прямоугольник 1 на 5 клеток, либо 2 на 3 клетки в любом месте доски содержит целиком хотя бы одно домино.
2) Докажем, что для произвольного разбиения доски 8 на 8 на домино можно найти некоторый прямоугольник площади 4, составленный из клеток, не содержащий ни одного домино целиком. Рассмотрим домино разбиения, содержащее клетку d4, можно, повернув при необходимости лоску, считать его горизонтальным. Подробно разберём случай, когда оно состоит из клеток c4, d4, второй случай, когда оно состоит из клеток d4,e4, аналогичен. Рассмотрим клетки c3, d3 и c5, d5. Если хотя бы одна из этих клеток, скажем c3 (остальные случаи аналогичны), лежит в горизонтальном домино разбиения, то вертикальный прямоугольник c2,c3.c4.c5 не содержит целиком ни одного домино разбиения. Если все эти клетки лежат в вертикальных домино разбиения, то домино, содержащие c3 и d3 вертикальны, поэтому прямоугольник b3,c3,d3,e3 не содержит целиком ни одного домино разбиения. Заметим, что за счёт выбора клетки d4 для начала рассуждений, обеспечивается невозможность выхода выбираемой полоски 1 на 4 за пределы доски.
Критерии проверки. (●) Если доказан пункт 1) что $n \le 4$. 2 балла. (●) Если доказан пункт 2, что всегда можно найти некоторый подходящий прямоугольник площади 4: 5 баллов. (●) Если пример разбиения, когда любой прямоугольник более, чем из 4 клеток, всегда содержит целое домино, приведён явно и правильно, то за отсутствие дотошной проверки его оценка не снижается. (●) В верном в целом рассуждении о выборе полоски 1 на 4 клетки, не содержащей ни одного домино целиком, не учтена возможность выхода за край доски: минус 2 балла. (●) В рассуждениях допускается возможность выхода искомого прямоугольника за край доски: за решение ставится 0 баллов.

9.4. В треугольнике ABC с большей стороной BC биссектрисы пересекаются в точке I. Прямые AI, BI, CI пересекают стороны BC, CA, AB в точках D, E, F соответственно. На отрезках BD и CD выбраны точки G и H соответственно такие, что угол GID равен углу ABC, а угол HID - углу ACB. Докажите, что углы BHE и CGF равны.
Доказательство. Обозначим величины углов треугольника ABC буквами A,B,C соответственно.
1) Найдём величины углов DHI и DGI. В четырёхугольнике ABGI углы при вершинах A,B,I равны A/2,B,180-B, поэтому величина угла BGI равна 180-A/2, а величина DGI равна A/2. Аналогично, в четырёхугольнике ACHI углы

при вершинах A,C,I равны A/2,C,180-C, поэтому величина угла CHI равна 180- A/2, а величина DHI равна A/2. Следовательно, треугольник HIG равнобедренный с углом A/2 при основании.
2) Треугольники HBI и ABI равны по общей стороне BI и прилежащим к ней углам HBI=B/2=ABI и HIB=180-A/2-B/2=AIB. Следовательно, равны соответствующие стороны HI=AI и углы BIH и BIA.
3) Треугольники EHI и EAI равны по двум сторонам HI=AI,EI=EI и углам HIE=180-BIH и AIE=180-BIA между ними. Следовательно, равны соответствующие углы EHI и EAI=A/2. Тогда величина угла BHE равна сумме углов DHI и EHI, то есть A. Аналогично, равны треугольники FGI и FAI и одноименные углы, поэтому величина угла CGF равна сумме углов DGI и FGI, то есть тоже A. Следовательно, углы BHE и CGF равны между собой, что и требовалось доказать.
Критерии проверки. (●)Доказано, что величины углов DGI и DHI равны A/2: 2 балла. (●) Доказано равенство треугольников HBI и ABI, GCI и ACI: 2 балла. (●) Доказано равенство треугольников EHI и EAI, FGI и FAI: 2 балла.
(●) Доказана, на основании предыдущего, что равны углы BHE и CGF: 1 балл.

9.5. На окружности отмечены $n>1$ точек, называемые *позициями*, делящих её на равные дуги,. Позиции занумерованы по часовой стрелке числами от 0 до $n-1$. Вася ставит в одну из них фишку. Далее неограниченное количество раз повторяются следующие действия, называемые *ходами*: Петя называет некоторое натуральное число, а Вася передвигает фишку по часовой стрелке или против неё на указанное Петей число позиций. Если в какой-то момент после хода Васи фишка окажется в позиции номер 0, Вася проиграет, а Петя выиграет. При каких n Петя всегда сможет выиграть, независимо от ходов Васи?
Ответ. При $n=2^k$, для всех натуральных k.
Решение. 1) Пусть сначала $n=2^k$, для некоторого натурального k. Выигрышной стратегией для Пети является следующая: если после очередного хода Васи фишка оказалась на позиции с номером $m=2^a(2b+1)$, то Петя называет число $m=2^a$. После этого Вася передвинет фишку либо на позицию номер $m=2^{a+1}(b+1)$, либо на позицию номер $m=2^{a+1}b$ (по модулю $n=2^k$). В любом случае, максимальная степень двойки, делящая номер позиции, на которой фишка окажется после очередного хода Васи, увеличивается минимум на 1. Следовательно, после не более, чем k ходов номер позиции фишки станет делиться на $n=2^k$, что возможно только для позиции с номером 0, и Петя выиграет.
2) Пусть теперь $n=2^k\cdot p, k\geq 0$, где $p=2b+1>1$ - максимальный нечётный делитель n. Заметим, что позиции, номера которых делятся на p, плохие для Васи, если он поставит сначала фишку на одну из них, то Петя, применяя стратегию, аналогичную описанной в п.1), называя каждый раз число $m=2^a\cdot p$, выиграет. Поэтому Вася должен сначала поставить фишку на

любую позицию с номером x, не делящимся на p. Пусть очередным ходом Петя назвал любое натуральное число s из диапазона от 1 до $n-1$. Одно из чисел $x-s$ и $x+s$ не делится на p, в противном случае на p делится их сумма, равна $2x$, а, значит, на p делится x, что противоречит его выбору. Следовательно, на каждом ходу Вася может ставить фишку на позицию, номер которой не делится на p, и она никогда не окажется на позиции с номером 0. Таким образом, для n, не являющихся степенями двойки, Петя выиграть не сможет.

Критерии проверки. (●) Приведена выигрышная стратегия для Пети в случае $n=2^k$**:** 3 балла.. (●) Приведена стратегия для Васи, позволяющая избежать проигрыша в случае $n \neq 2^k$**:** 4 балла. **В ней**: выбор первой позиции**:** 2 балла; доказательство возможности выбора правильного направления каждого следующего хода**:** 2 балла. За отсутствие строгого рассмотрения номеров позиций по модулю n при переходе через 0 баллы не снимаются.