Решения заданий второго (дополнительного отборочного) этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике 2021-2022 гг.

Решения всех заданий оцениваются из 7 баллов

9 класс

9.1.. Найти наименьшее натуральное число, делящееся на 999, все цифры в десятичной записи которого различны.

Ответ. 12987=999·13.

Решение. Пусть искомое число равно $999 \cdot n$ при некотором натуральном n. Тогда при $n \leq 10$ число $999 \cdot n = 1000n - n$ меньше $1000n$, но не меньше $1000n - 10$, поэтому его вторая и третья цифры равны 9 и одинаковы. При $n = 11$ и $n = 12$ число равно 10989 и 11988 и содержит одинаковые цифры, а вот при $n = 13$ число равно 12987 и не содержит в записи одинаковых цифр. Следовательно, $n = 13$ минимально и число 12987 является ответом задачи.

Критерии проверки. (●) Приведён верный ответ без обоснований минимальности: 3 балла. (●) Если обоснование минимальности существует, но не полно: минус 1-2 балла.

9.2 Банкир выходит из дома, ровно в этот момент за ним приходит из банка машина, которая отвозит его в банк. Банкир выходит, а машина выезжает из банка всегда в одно и то же время, машина едет всегда с одной и той же постоянной скоростью. Однажды банкир вышел из дому на 55 минут раньше, чем обычно, и для прикола пошёл по дороге в сторону, противоположную банку. Машина догнала его и привезла в банк на 10 минут позже обычного. Найти отношение скоростей машины и банкира.

Ответ. Скорость машины в 12 раз больше скорости банкира.

Решение. Действительно, машина привезла банкира в банк на 10 минут позже обычного, значит, догнала его на 5 минут позже обычного, то - есть того момента, когда он обычно выходил из дому. Следовательно, от дома банкира до момента встречи (или поимки) машина ехала 5 минут. Банкир же, выйдя на 55 минут раньше обычного, и будучи догнан (пойман) машиной, прошёл к этому моменту от дома 55+5=60 минут. Значит, машина едет в 12 раз быстрее, чем идёт банкир.

Критерии проверки. (●) Доказано, что от дома банкира до момента встречи машина ехала 5 минут: 3 балла. (●) Доказано, что банкир к моменту встречи прошёл 60 минут: 2 балла. (●) Доказано, что машина едет в 12 раз быстрее, чем идёт банкир: 2 балла.

9.3.. Пусть $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 10$. Доказать, что $x - 2y \leq 200$.

Доказательство. Перепишем условие в виде $\sqrt{x} = \sqrt{y} + 10$. Обе части равенства неотрицательны, возводим в квадрат: $x = 100 + 20\sqrt{y} + y$. Тогда $x - 2y = 100 + 20\sqrt{y} - y = 200 - (10 - \sqrt{y})^2 \leq 200$, что и требовалось доказать

Критерии проверки. Неупоминание о неотрицательности частей равенства перед возведением в квадрат: минус 1 балл.

9.4. На отрезке АВ, как на диаметре, построен полукруг, в котором точка М – середина дуги АВ. На дуге ВМ выбрана произвольная точка К, отличная от В и М, через Р обозначена точка пересечения прямых АВ и МК. Пусть Т -точка пересечения прямой АК и перпендикуляра к прямой АВ, проведённого через точку Р. Докажите, что длины отрезков ВР и РТ равны.

Доказательство. Утверждение задачи равносильно тому, что $\angle TBP = 45°$. Угол АКВ вписан в полукруг и опирается на его диаметр, поэтому он и смежный с ним угол ТКВ – прямые. В четырёхугольнике ВКТР углы К и Р прямые, поэтому он является вписанным. Следовательно, вписанные углы ТВР и ТКР равны, как опирающиеся на общую дугу ТР. В свою очередь, угол ТКР равен вертикальному с ним углу МКА, вписанному в исходную полуокружность, а угол МКА равен углу МВА. Угол МВА является углом при основании равнобедренного прямоугольного треугольника АМВ, значит его величина равна 45˚. Следовательно, и величина равного ему угла ТВР равна 45˚, поэтому треугольник ВРТ является прямоугольным равнобедренным и его катеты ВР и РТ равны, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. (●) Доказано, что четырёхугольник ВКТР является вписанным: 2 балла. (●) Доказано, что угол ТКР равен углу МВА: 3 балла. (●) Доказано, что угол МВА равен 45˚: 2 балла.

9.5.. В ряд слева направо лежат n монет. Известно, что две из них фальшивые, они лежат рядом, левая весит 9 граммов, правая 11 граммов, а все оставшиеся настоящие и каждая из них весит 10 граммов. Монеты взвешивают на чашечных весах, которые либо показывают, груз на какой их двух чашек тяжелее, либо находятся в равновесии, и тогда грузы на обеих чашках имеют одинаковый вес. При каком максимальном n можно за три взвешивания найти монету весом 11 граммов?.

Ответ. $n = 28$.

Решение. Пусть $n = 28$. Разобьём все монет 28 на три кучи, первая – монеты с номерами 11,13,15,17,19,21,23,25,27, вторая – монеты с номерами 12,14,16,18,20,22,24,26,28, третья – монеты с номерами с 1 по 10. Первым взвешиванием сравниваем первую и вторую две кучи. Заметим, что, если весы не в равновесии, то тяжёлая монета в тяжёлой куче. Действительно, если номера обеих фальшивых монет больше 10, то лёгкая попадёт в одну из двух взвешиваемых куч, а тяжёлая – в другую и та перевесит. Если номера обеих фальшивых монет не больше 10, то обе попадут в третью кучу и весы останутся в равновесии. Если номера фальшивых монет равны 10 и 11, то тяжёлая попадёт в первую кучу, а вторая будет полностью состоять из настоящих монет и первая перевесит. Важно отметить, что, если делать аналогичное разбиение по порядку не с конца номеров, а сначала, то это неверно, когда фальшивые монеты лежат на 18-ом и 19-ом местах. Если же весы в равновесии, то тяжёлая и лёгкая монеты в третьей куче из 10 монет. В этом, «худшем», случае разобьём третью кучу аналогично на три: в первой номера 6,8,10, во второй номера 5,7,9, в третьей номера 1,2,3,4. Вторым взвешиванием сравниваем первую и вторую кучи и выясняем, в какой из трёх куч тяжёлая монета теперь. Если снова равенство и она вместе с лёгкой снова в третьей куче из 4 монет, сравниваем монеты 3 и 4. При равенстве - тяжёлая 2-ая, если одна тяжелее – та и тяжёлая. То же самое, если тяжёлая в куче из 3 монет – сравниваем вторую и третью, которая тяжелее – та и тяжёлая.

Если в первом взвешивании тяжёлая монета окажется, скажем, в первой куче, разбиваем её на три по три: в первой монеты 19,23,27. во второй 17,21.25, в третьей 11,13,15 и взвешиваем первую и вторую, находим кучу из трёх монет, содержащую тяжёлую. Последним взвешиванием второй и третьей в этой куче находим искомую. Аналогично, если при первом взвешивании тяжёлая монета окажется во второй куче. Отметим, что лёгкая монета участвует в третьем взвешивании тогда и только тогда, когда в двух первых имеет место равенство.

Если монет будет больше 28, то возможных положений для тяжёлой монеты будет больше $27=3^3$, что больше числа возможных исходов при трёх взвешиваниях, равного $3\cdot 3\cdot 3$. Поэтому нельзя однозначно сопоставить номер тяжёлой монеты определённому исходу трёх взвешиваний и найти её.

Критерии проверки. Алгоритм нахождения тяжёлой монеты при $n=28$: 5 баллов (●) Если производятся аналогичные указанным в авторском решении разбиения, но с начала номеров, а остальное так же: снимаем 2 балла. (●) При верном разбиении нет явного объяснения того, что, если при первом взвешивании весы не в равновесии, то тяжёлая монета в тяжёлой куче: снимаем 1 балл. (●)

Доказательство того, что при $n>28$ тяжёлую монету нельзя обнаружить с гарантией за три взвешивания: 2 балла.