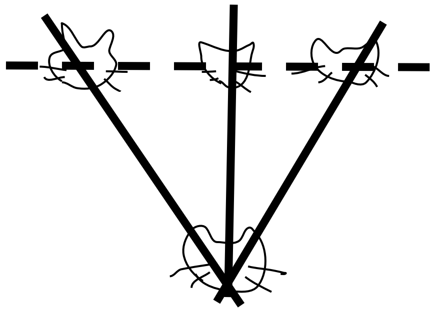
Всесибирская открытая олимпиада школьников 2021-2022 г.г. по математике
Основной отборочный этап
7 класс
Решения

Каждая задача оценивается в 7 баллов.
Время выполнения 4 астрономических часа.



7.1. На картинке 4 котёнка образуют один ряд, в котором 3 котёнка, и три ряда, в которых по два котёнка. Разместите 6 котят на плоскости так, чтобы получилось 3 ряда, в каждом из которых ровно по 3 котёнка, и 6 рядов, в каждом из которых ровно по 2 котёнка (считайте котят точками на плоскости). *(Достаточно привести один пример)*

Решение. Посадим трёх котят в вершины произвольного треугольника, а остальных – в середины его сторон. Несложно понять, что условие задачи будет выполнено.

Критерии. Любой верный пример без объяснения – 7 баллов.

7.2. Элли и Тотошка красили ромашки на поле. В первый день Элли покрасила четырнадцатую часть всего поля. Во второй день она покрасила в два раза больше, чем в первый, а в третий — в два раза больше, чем во второй. Тотошка же в итоге покрасил суммарно 7000 ромашек. Сколько всего ромашек на поле, если известно, что они все оказались покрашены? *(Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет)*

Решение. Пусть на поле всего n ромашек. Тогда Элли покрасила $n/14 + 2n/14 + 4n/14 = 7n/14 = n/2$ ромашек всего. Значит, Тотошка тоже покрасил половину поля, откуда следует, что половина поля – это 7000 ромашек, а поле целиком – 14000.

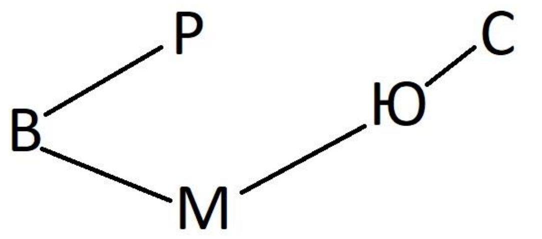
Критерии. Только ответ – 1 балл.
Только ответ с проверкой, что он верен – 2 балла.

7.3. Три одиннадцатиклассницы играли в крестики-нолики против двух девятиклассниц (в каждом матче встречались одиннадцатиклассница и девятиклассница). Известно, что Вероника выиграла у Риты, затем Юля выиграла у Светланы, а Вероника - у Марии, и, наконец, Мария выиграла у Юли. Как звали одиннадцатиклассниц? *(Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет)*

Решение. Вероника выиграла и у Риты, и у Марии. Значит, Рита и Мария из одного класса. Мария выиграла у Юли, значит, Юля не в одном классе с Марией, а значит, она с Вероникой. Аналогично, Юля выиграла у Светланы, поэтому Светлана тоже с Марией. Итого, получаем, что в одном классе Вероника и Юля, а в другом – Рита, Мария и Светлана. Так как одиннадцатиклассниц по условию три, это как раз Рита, Мария и Светлана.

Критерии. Только ответ – 1 балл.
Только ответ с проверкой, что он верен – 2 балла.

Решение 2. Нарисуем картинку, на которой соединим отрезками игравших друг с другом девочек. Понятно, что в этой цепочке классы девочек чередуются. Тогда Рита, Мария и Светлана из одного класса, а Вероника и Юля – из другого. Отсюда и находим одиннадцатиклассниц.



Критерии. (для решения с картинкой) Нарисована картинка – 3 балла.
Замечено, что две соседние девочки не могут быть одноклассницами, поэтому в этой цепочке классы чередуются – 2 балла.
Ответ – 2 балла.

7.4. Антону из деревни передали несколько кабачков, и он решил раздать их друзьям. Арине он отдал половину от полученного количества кабачков, а Вере — треть (тоже от полученного количества). Оказалось, что после этого у Арины количество кабачков стало выражаться квадратом некоторого натурального числа, а у Веры — кубом (до этого у них кабачков не было вообще). Найдите наименьшее возможное количество кабачков, которое мог получить Антон из деревни. *(Найдите ответ и докажите, что он минимален).*

Решение. Пусть Антон получил n кабачков. Так как и половина, и треть n – это целые числа, то n делится на 6, то есть $n = 6k$ для некоторого натурального k. Тогда известно, что $3k$ – это квадрат натурального числа, а $2k$ – куб. Пусть $k = 2^p3^qm$. Другими словами, пусть p и q – это максимальные степени двойки и тройки, на которые делится k. Тогда $3k = 2^p3^{q+1}m$, и, так как это квадрат, p и $q + 1$ – это чётные числа. С другой стороны, $2k = 2^{p+1}3^qm$ – это куб, поэтому $p + 1$ и q делятся на 3. Заметим, что тогда p это хотя бы 2 (потому что $p + 1$ делится на 3), а q это хотя бы 3 (потому что q делится на 3 и $q \neq 0$ из условия чётности $q + 1$). Тогда k делится хотя бы на 4 и 27, откуда k это хотя бы 108, а n хотя бы 648. Очевидно, что $648 = 6 \times 4 \times 27$ подходит по построению.

Критерии. Только ответ – 1 балл.
Проверка, что ответ подходит – 1 балл (в данном решении эта проверка неявно следует из того, что мы ищем именно подходящие числа).
Доказано, что n делится на 6 – 1 балл.
Доказательство того, что k должно делиться на 4 и 27 (или что n делится на 8 и 81, что одно и то же) – по 2 балла за каждый факт.
Все вышестоящие баллы суммируются.
Ответ можно оставлять в форме произведения, за отсутствие явной записи баллы не снимать.

7.5. На вечеринку пришло 20 человек. Известно, у каждого из них ровно 14 друзей среди пришедших (дружба взаимна). Кроме того, посреди вечеринки 10 людей вышли на балкон, и оказалось, что все они дружат друг с другом. Докажите, что всех пришедших на вечеринку людей можно разделить по двум комнатам таким образом, чтобы в каждой комнате все дружили со всеми.

Решение. Пусть каждые два друга дадут по подзатыльнику друг другу. Зафиксируем десятерых, любые двое из которых друзья (те, кто вышел на балкон). Назовём их синими, а остальных десятерых – зелёными. Каждый из синих знаком с девятью синими и, стало быть, с пятью зелёными. Значит, всего синие дали зелёным 50 подзатыльников (следовательно, и зелёные синим тоже).
Поскольку в сумме зелёные дали $14 \times 10 = 140$ подзатыльников, 90 из них приходятся на подзатыльники, данные зелёными между собой. Так как каждый из зелёных мог дать подзатыльник только 9 зелёным (то есть, максимум 9*10 подзатыльников всего), то зелёными были даны все возможные подзатыльники, то есть каждый из зелёных дружит с каждым, что и завершает доказательство.

Критерии. Только пример того, что такое возможно в конкретном случае – 0 баллов.
Доказано, что синие дали зелёным 50 подзатыльников – 2 балла.