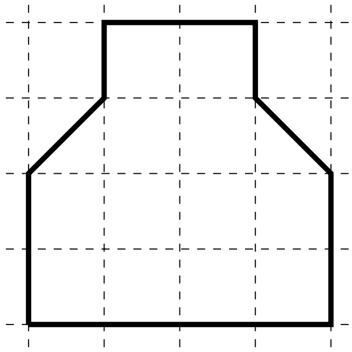
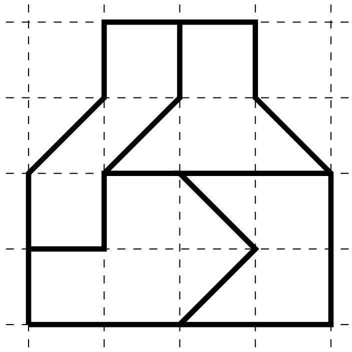
Всесибирская открытая олимпиада школьников 2021-2022 г.г. по математике
Заключительный этап
7 класс

7.1. Разрежьте данную фигуру на четыре попарно различных части так, чтобы у всех этих частей был одинаковый периметр. Напомним, что фигуры считаются различными, если их нельзя совместить наложением. *(Достаточно привести один пример.)*



Решение: Одно из решений выглядит так.



Критерии: Любое верное разрезание – 7 баллов

7.2. Дорога из пункта А в пункт Б идёт сначала в гору, а потом под гору. Кошка доходит из А в Б за 2 часа 12 минут, обратный путь занимает у неё на 6 минут больше. Скорость кошки, идущей в гору, 4 км/ч, а под гору — 5 км/ч. Сколько километров составляет путь от А до Б? *(Приведите полное решение, а не только ответ.)*

Решение: Когда кошка идёт в гору, то на 1 км она тратит 15 минут, а когда под гору – 12 минут. То есть, при перемене направления время, которое тратится на 1 км, меняется на 3 минуты. Так как на обратный путь кошка потратила на 6 минут больше, то участок, идущий в гору, на обратном пути на 2 км больше.
Пусть длина участка на пути из А в Б, идущего в гору, равна x. Тогда можно составить уравнение $15x + 12(x + 2) = 132$, откуда $x = 4$. Значит, весь путь равен $x + (x + 2) = 4 + 6 = 10$ км.

Комментарий: Возможны и другие решения. Например, можно было сразу составить систему уравнений и решить её. Или можно было доказать, что разности между двумя участками пути равна 2 км, затем угадать ответ, а потом доказать его единственность.

Критерии: Только ответ – 0 баллов.
Ответ с проверкой – 1 балл.
Верная система уравнений – 2 балла.
Доказано, что разность между двумя участками пути равна 2 км – 1 балл.

7.3. Какое из чисел больше:

$$2017^{2022} \cdot 2018^{2021} \cdot \ldots \cdot 2022^{2017} \quad \text{или} \quad 2017^{2017} \cdot 2018^{2018} \cdot \ldots \cdot 2022^{2022}?$$

(Обоснуйте свой ответ.)

Решение 1: Распишем оба произведения без степеней так, чтобы множители в каждом из них шли в порядке неубывания. Расположим эти записи друг под другом.

$$\underbrace{2017 \cdot \ldots \cdot 2017}_{2017} \cdot \underbrace{2017 \cdot \ldots \cdot 2017}_{5} \cdot \ldots \cdot \underbrace{2021 \cdot \ldots \cdot 2021}_{5} \cdot \underbrace{2022 \cdot \ldots \cdot 2022}_{2017}$$
$$\underbrace{2017 \cdot \ldots \cdot 2017}_{2017} \cdot \underbrace{2018 \cdot \ldots \cdot 2018}_{5} \cdot \ldots \cdot \underbrace{2022 \cdot \ldots \cdot 2022}_{5} \cdot \underbrace{2022 \cdot \ldots \cdot 2022}_{2017}$$

Тогда очевидно, что каждый множитель первого произведения будет меньше или равен соответствующего множителя второго произведения. Кроме этого, хотя бы один раз множитель первого произведения будет строго меньше соответствующего множителя второго произведения. Например, 2018-ый множитель первого произведения 2017, а второго – 2018. Значит, второе произведение больше.

Решение 2: Пусть есть два натуральных числах $a < b$. Сравним два выражения $a^b \cdot b^a$ и $a^a \cdot b^b$. Для этого поделим первое выражение на второе и сократим степени. Получим

$$\frac{a^b \cdot b^a}{a^a \cdot b^b} = \frac{a^{b-a}}{b^{b-a}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{b-a} < 1,$$

так как $a < b$. Значит, первое выражение меньше второго. В частности, в нашей задаче

$$2017^{2022} \cdot 2022^{2017} < 2017^{2017} \cdot 2022^{2022}$$
$$2018^{2021} \cdot 2021^{2018} < 2018^{2018} \cdot 2021^{2021}$$
$$2019^{2020} \cdot 2020^{2019} < 2019^{2019} \cdot 2020^{2020},$$

в чём, в принципе, можно было убедиться и сократив по-честному числа. Но тогда первое число из условия состоит из сомножителей, которые меньше соответствующих сомножителей второго. А значит, первое число меньше.

Критерии: Только ответ – 0 баллов.
Проверка ответа на маленьких случаях – 0 баллов.
Разбиение слагаемых на удобные пары – 2 балла.
Доказательство, что для натуральных числах $a < b$ выполнено $a^b \cdot b^a < a^a \cdot b^b$ – 4 балла.
Решение, опирающиеся на факт из предыдущего критерия, но без доказательства этого факта – 3 балла.

7.4. На некотором острове живёт 100 человек, каждый из которых является либо рыцарем, который всегда говорит правду, либо лжецом, который всегда лжёт. Однажды все жители этого острова выстроились в ряд, и первый из них сказал: “Количество рыцарей на этом острове является делителем числа 1”. Затем второй сказал: “Количество рыцарей на этом острове является делителем числа 2”, и так далее до сотого, который сказал: “Количество рыцарей на этом острове является делителем числа 100”. Определите, сколько рыцарей может проживать на этом острове. *(Найдите все ответы и докажите, что других нет.)*

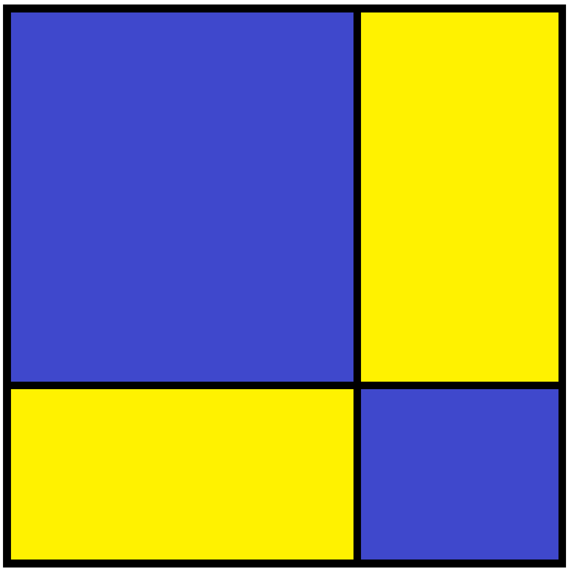
Решение: Если рыцарей нет, то все говорящие врут, так как 0 не является делителем какого-либо натурального числа.
Если рыцари есть, то пусть их a человек. Тогда правду говорят только люди под номерами ak для $k = 1, 2, \ldots$. С другой стороны, так как правду говорит ровно a человек, k меняется в точности от 1 до a.
Значит, a — это такое число, что человек с номером $a \cdot a$ в ряду ещё есть ($a^2 \leqslant 100$), а с номером $a \cdot (a+1)$ — уже нет ($a(a+1) > 100$). Очевидно, что подходит только $a = 10$, так как при $a < 10$ нарушается второе неравенство, а при $a > 10$ — первое.
Итого, рыцарей либо 0, либо 10.

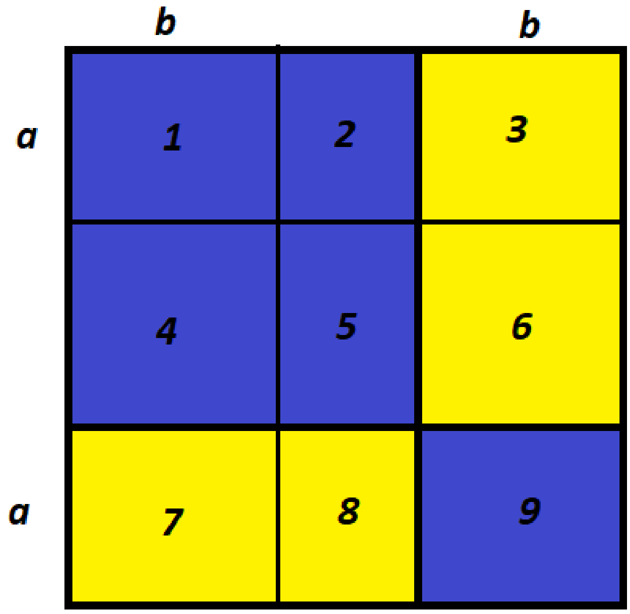
Критерии: Только ответ – 0 баллов.
Случай, в котором нет рыцарей – 1 балл.
Замечено, что правду должны говорить люди с номерами a, $2a$, $\ldots$, ka – 2 балла.
Доказано, что $k = a$ – ещё 2 балла.
Доказано, что тогда $a = 10$ – ещё 2 балла.

7.5. Квадрат 2×2 был разбит прямыми, параллельными его сторонам, на несколько прямоугольников (не обязательно равных). Затем эти прямоугольники были покрашены в жёлтый и синий цвета в шахматном порядке. Оказалось, что общая площадь синих прямоугольников совпала с общей площадью жёлтых. Докажите, что из синих прямоугольников можно сложить прямоугольник 1×2. *(Напишите полное доказательство.)*

Решение: Переставим столбцы так, чтобы все синие прямоугольники в первой строке шли подряд, начиная с левого края. Легко понять, что при этом и во всех остальных строках синие прямоугольники будут идти подряд: в нечётных — с левого края, в чётных — с правого. Также подряд будут идти во всех строках и жёлтые прямоугольники. Теперь переставим строки так, чтобы все бывшие строки с нечётными номерами шли подряд, и все бывшие строки с чётными — тоже. Тогда все прямоугольники сгруппируются в четыре больших (см. левый рисунок). Если мы покажем теперь, что общая вершина двух синих прямоугольников при выполнении условия задачи лежит на одной из средних линий квадрата, получится, что оба синих прямоугольника имеют сторону, равную 1, а сумма двух других сторон равна 2, и задача будет решена.
Допустим, это не так. Пусть, например, центр квадрата — внутри синего прямоугольника. Пусть тогда высота нижнего жёлтого прямоугольника равна $a < 1$, а ширина правого — $b < 1$. Отложим сверху и слева соответственно длины a и b и разделим квадрат на 9 прямоугольников как на рисунке. Через S_i будем обозначать площадь i-го прямоугольника. Тогда $S_1 = S_7$, $S_4 = S_6$, $S_2 = S_8$ и $S_3 = S_9$. Но тогда площадь всех синих прямоугольников больше площади всех жёлтых на S_5. А должна быть равна (так как

они составляют по половине площади квадрата). Аналогичное противоречие получается, если центр квадрата лежит внутри жёлтого прямоугольника.





Критерии: Рассмотрен случай, когда всего 4 прямоугольника – 3 балла.
Доказано, что любую расстановку можно перевести в расстановку, в которой 4 прямоугольника – 3 балла.
Есть идея, что любую расстановку можно свести к расстановке, в которой 4 прямоугольника, но доказательства этого факта нет – 1 балл.