11 класс
Решения всех заданий оцениваются из 7 баллов

11.1. Десятичная запись натурального числа N содержит каждую цифру от 0 до 9 ровно один раз. Обозначим через A сумму пяти двузначных чисел, составленных из первой и второй, третьей и четвёртой,…, девятой и десятой цифр N, а через B – сумму четырёх двузначных чисел, составленных из второй и третьей, четвёртой и пятой,…, восьмой и девятой цифр N. Оказалось, что A равно B, может ли N начинаться с чётной цифры?

Ответ. Нет.

Решение. Пусть $N=\overline{a_1a_2...a_8a_9a_{10}}$, где $a_1,a_2,...,a_8,a_9,a_{10}$ - некоторая перестановка чисел 0,1,2,…,8,9. Тогда

$A=\overline{a_1a_2}+\overline{a_3a_4}+...+\overline{a_9a_{10}}=10(a_1+a_3+...+a_9)+(a_2+a_4+...+a_{10})$,

$B=\overline{a_2a_3}+\overline{a_4a_5}+...+\overline{a_8a_9}=10(a_2+a_4+...+a_8)+(a_3+a_5+...+a_9)$. Если A=B, то $10a_1+9(a_3+...+a_9)+a_{10}=9(a_2+a_4+...+a_8)$, откуда следует, что a_1+a_{10} делится на 9. Одна из двух различных цифр a_1,a_{10} ненулевая, поэтому $a_1+a_{10}\ge 0+1=1$ и $a_1+a_{10}\le 8+9=17$, то есть $1\le a_1+a_{10}\le 17$ и, следовательно $a_1+a_{10}=9$. Значит, $a_1+a_3+...+a_9+1=a_2+a_4+...+a_8$. Вспомним, что $a_1,a_2,...,a_8,a_9,a_{10}$ - некоторая перестановка чисел 0,1,2,…,8,9, поэтому сумма всех цифр $a_1,a_2,...,a_8,a_9,a_{10}$ равна 0+1+2+…+9=45 – нечётна. Тогда $a_1+a_3+...+a_9+a_2+a_4+...+a_8+a_{10}+1=46=2(a_2+a_4+...+a_8)+a_{10}$, следовательно, цифра a_{10} чётна, а цифра $a_1=9-a_{10}$ - нечётна цифра a_{10} чётна, а цифра $a_1=9-a_{10}$ - нечётна.

Критерии проверки. (●) Доказательство того, что a_1+a_{10} делится на 9: 2 балла. (●) Доказательство того, что $a_1+a_{10}=9$: 2 балла. **.** (●) Доказательство отсюда того, что цифра a_{10} чётна, а цифра a_1 - нечётна: 3 балла.

11.2. Найти все решения в действительных числах системы уравнений

$$\begin{cases} x(1+yz)=9, \\ y(1+xz)=12, \\ z(1+xy)=10. \end{cases}$$

Ответ. $x=1, y=4, z=2$.

Решение. Вычтем первое уравнение из второго и третьего, получим: $y-x=3, z-x=1$. Подставим выражения $y=x+3, z=x+1$ в первое уравнение, получим $x(x+3)(x+1)+x=9$, что после раскрытия скобок приводит к кубическому уравнению $x^3+4x^2+4x-9=0$. Одним из его корней является $x=1$, разлагаем левую часть на множители $x^3+4x^2+4x-9=(x-1)(x^2+5x+9)$. Дискриминант второй скобки отрицателен, поэтому единственным действительным корнем уравнения $x^3+4x^2+4x-9=0$ и решением исходной системы является $x=1$. Тогда $y=x+3=4, z=x+1=2$.

Замечание. После нахождения действительного корня $x=1$ его единственность можно доказать и другим способом, исследовав функцию

$f(x)=x^3+4x^2+4x-9$. Её производная $f(x)=3x^2+8x+4$ имеет корни $x_1=-2, x_2=-\frac{2}{3}$, она больше нуля левее первого и правее второго из них, и отрицательна между ними. Следовательно. функция $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty,-2]\cup[-\frac{2}{3},+\infty)$ и убывает на промежутке $[-2,-\frac{2}{3}]$. Значит, точка $x_1=-2$ является точкой её локального максимума, а точка $x_2=-\frac{2}{3}$ - точкой локального минимума. При этом её значения в этих точках $f(-2)=-9, f(-\frac{2}{3})=-\frac{275}{27}$ отрицательны, следовательно, её график может пересекать ось OX только на промежутке $(-\frac{2}{3},+\infty)$, на котором она строго монотонно возрастает. Значит, решений уравнения $f(x)=0$ не может быть больше одного, уже найденного нами $x=1$.

Критерии проверки. (●) Ответ угадан и проверен: 1 балл.
(●) Найдены выражения всех переменных через одно типа $y=x+3, z=x+1$: 1 балл. (●) Выражения подставлены в одно из уравнений и получено кубическое уравнение типа $x^3+4x^2+4x-9=0$: 1 балл. (●) Замечен и проверен корень кубического уравнения типа $x=1$: 2 балла. (●) Вычислены по нему значения остальных переменных: 1 балл. (●) Доказано, что других корней у кубического уравнения нет и решение единственно: 2 балла.

11.3. Перестановка чисел $1,2,3,...,n$ в некотором порядке называется *забавной*, если в ней каждое число, начиная со второго слева, либо больше всех чисел, стоящих левее него, либо меньше всех чисел, стоящих левее него. Например, перестановка *3,2,1,4.5,6* является забавной, а перестановка *3,1,2,4.5,6* – нет. Найти количество всех различных забавных перестановок чисел $1,2,3,...,n$.

Ответ. 2^{n-1}.

Обозначим числа нашей перестановки слева направо за $a_1,a_2,...,a_n$.

Решение 1. Пойдём с конца. Последнее число a_n забавной перестановки либо больше, либо меньше всех чисел множества $1,2,3,...,n$, следовательно, оно равно 1 или n. Предпоследнее число a_{n-1} забавной перестановки либо больше, либо меньше всех чисел множества $1,2,3,...,n$, кроме a_n, то есть это наименьший или наибольший элемент во множестве $1,2,3,...,n-1$ или во множестве $2,3,...,n$. В каждом из случаев есть ровно две возможности выбора, варианты для двух последних чисел перестановки выглядят так *(n-1,n),(1,n),(2,1),(n,1)*. Несложно убедиться, что при любом $k=n,n-1,...,2,1$ первые k чисел $a_1,a_2,...,a_k$ перестановки образуют интервал из k подряд идущих чисел из множества $1,2,3,...,n$, а число a_k является в этом интервале минимальным или максимальным – всего две возможности, кроме самого первого числа a_1, для которого остаётся единственная возможность. Всего получаем ровно 2^{n-1} возможностей выбора.

Критерии проверки решения 1. (●) Замечено и обосновано, что последнее число забавной перестановки равно 1 или n: 1 балл.

(●) Замечено и явно сформулировано, что на каждом шагу множество $a_1, a_2, ..., a_k$, образуют интервал из k подряд идущих чисел из множества $1,2,3,...,n$: 1 балл

(●) Сформулировано, что для выбора каждого очередного a_k есть ровно две возможности: 1 балл.

(●) Уточнено, что в качестве a_k выбирается максимальное или минимальное из интервала оставшихся чисел: 1 балл.

(●). Отсюда получено, что всего есть ровно 2^{n-1} возможностей выбора перестановки: 3 балла.

Решение 2. Пусть $a_1 = m$, где m - одно из чисел $1, 2, ..., n$. Любое число a_k, меньшее m, будет по условию также меньше и всех чисел, меньших m и стоящих левее a_k, поэтому все числа забавной перестановки, меньшие m образуют в ней убывающую подпоследовательность. Аналогично, все числа, большие m, образуют в ней возрастающую подпоследовательность. При этом любое взаимное расположение этих подпоследовательностей удовлетворяет условию и приводит к забавной перестановке.

Следовательно, любая забавная перестановка полностью задаётся значением её первого элемента $m = 1,2,...,n$ и номерами $m-1$ мест, на которых в убывающем порядке слева направо расположены числа $m-1, m-2,...,1$ среди $n-1$ всех членов забавной перестановки, кроме первого. Остальные места автоматически заполнятся числами $m+1, m+2,...,n$ в порядке возрастания. Следовательно, при фиксированном $m = 1,2,...,n$ количество забавных перестановок равно числу сочетаний C_{n-1}^{m-1}, а общее их количество равно сумме $C_{n-1}^{0} + C_{n-1}^{1} + .. + C_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1}$.

Критерии проверки решения 2. (●) Замечено и обосновано, что все числа, меньшие m, образуют убывающую подпоследовательность: 1 балл.

(●) Замечено и обосновано, что все числа, большие m, образуют возрастающую подпоследовательность: 1 балл. (●) Если в одном или обоих предыдущих пунктах отсутствует обоснование: минус 1 балл.

(●) Сформулировано (1 балл) и доказано (1 балл), что любое взаимное расположение этих подпоследовательностей приводит к забавной перестановке: в сумме 2 балла.

(●) Сформулировано, что любая забавная перестановка полностью задаётся выбором её первого элемента и номерами мест, на которых в убывающем порядке слева направо расположены числа, меньшие первого, среди всех членов забавной перестановки: 1 балл.

(●) На основании этого верно указано, что при фиксированном $m = 1,2,...,n$ количество забавных перестановок равно C_{n-1}^{m-1}: 1 балл.

(●) Верно найдена сумма $C_{n-1}^{0} + C_{n-1}^{1} + .. + C_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1}$: 1 балл.

Решение 3. Пойдём с начала, рассмотрим, как меняется множество $A_k = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ первых k чисел забавной перестановки при увеличении

$k=1,2,3,...,n$. В качестве a_1 можно взять любое натуральное число из интервала $1,2,3,...,n$ и $A_1=\{a_1\}$ Пусть на k-ом шаге уже выбраны числа $a_1,a_2,...,a_k$, обозначим за m_k.и M_k соответственно минимальное и максимальное их них.

Докажем, что очередное a_{k+1} должно равняться либо m_k-1, либо M_k+1. Действительно, если $m_k<a_{k+1}<M_k$, сразу нарушается условие забавности, так как a_{k+1} расположено правее m_k.и M_k, но больше одного из них и меньше другого. Если $a_{k+1}\le m_k-2$, то число m_k-1 не входит в $A_k=\{a_1,a_2,...,a_k\}$ и ещё не использовано в перестановке, значит, оно будет расположено в ней где-то правее a_{k+1}, тогда тройка $m_{k,...,}a_{k+1},...,m_k-1$ нарушает условие забавности. так как при этом m_k-1 меньше m_k, но больше a_{k+1}. Стоящих левее него. Аналогично доказывается, что предположение $a_{k+1}\ge M_k+2$ также нарушает условие забавности. Остаётся только $a_{k+1}=m_k-1$ или $a_{k+1}=M_k+1$.

Из доказанного следует, что для каждого $k=1,2,3,...,n$ множество A_k состоит из некоторых k последовательных чисел из интервала $1,2,3,...,n$ и A_{k+1} получается из него добавлением числа, соседнего с этим интервалом слева или справа. Значит, забавная перестановка при данном подходе однозначно задаётся первым числом m, и последовательностью $n-1$ добавления нового числа слева и справа от уже использованных, из которых $m-1$ будут добавлением чисел слева и $n-m$ - добавлением чисел справа. Последовательность же добавлений однозначно определяется $m-1$ номерами добавлений слева. Следовательно, при фиксированном первом числе m количество забавных перестановок равно числу сочетаний C_{n-1}^{m-1}, а общее их количество равно сумме $C_{n-1}^{0}+C_{n-1}^{1}+..+C_{n-1}^{n-1}=2^{n-1}$.

Замечание. Возможен следующий вариант этого решения. Доказывается, что $a_{k+1}<m_k$ или $a_{k+1}>M_k$, поэтому на каждом шаге разность между M_k и m_k увеличивается не меньше, чем на 1. Количество шагов равно $n-1$, а итоговая разность между M_n и m_n не превосходит $n-1$, значит на каждом шаге она растёт ровно на 1. Отсюда сразу получается, что для каждого $k=1,2,3,...,n$ множество A_k состоит из некоторых k последовательных чисел из интервала $1,2,3,...,n$ и A_{k+1} получается из него добавлением числа, соседнего с этим интервалом слева или справа. Далее окончание доказательства такое же, как в только что рассмотренном.

Критерии проверки решения 3. (●) Сформулировано, что A_k является множеством из некоторых k последовательных натуральных чисел: 1 балл. (●) Сформулировано (1 балл) и доказано (2 балла), что $a_{k+1}=m_k-1$ или $a_{k+1}=M_k+1$:итого 3 балла.

(●) Сформулировано, что забавная перестановка задаётся первым числом m, и $m-1$ номерами добавлений слева: 1 балл

(●) Сформулировано, что при фиксированном m количество забавных перестановок равно C_{n-1}^{m-1}: 1 балл.

(●) Верно найдена сумма $C_{n-1}^{0}+C_{n-1}^{1}+..+C_{n-1}^{n-1}=2^{n-1}$: 1 балл.

В варианте решения 3. (●) Доказывается, что $a_{k+1} < m_k$ или $a_{k+1} > M_k$, поэтому на каждом шаге разность между M_k и m_k увеличивается не меньше, чем на 1: 2 балла

(●) Доказано, что количество шагов равно $n-1$, а итоговая разность между M_n и m_n не превосходит $n-1$, значит на каждом шаге она растёт ровно на 1 и $a_{k+1} = m_k - 1$ или $a_{k+1} = M_k + 1$: 2 балла.

(●) Сформулировано, что забавная перестановка задаётся первым числом m, и $m-1$ номерами добавлений слева: 1 балл

(●) Сформулировано, что при фиксированном m количество забавных перестановок равно C_{n-1}^{m-1}: 1 балл.

(●) Верно найдена сумма $C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + .. + C_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1}$: 1 балл.

Решение 4.. Индукцией по n докажем, что для произвольного n количество забавных перестановок равно 2^n. База индукции - при $n=1$ и $n=2$ оно, очевидно, равно $1=2^0$, и $2=2^1$. Пусть для n чисел утверждение верно, рассмотрим произвольную забавную перестановку чисел $1,2,3,...,n,n+1$. Пусть число $n+1$ стоит на k- ом слева месте. Если справа от $n+1$ стоит некоторое число m, то любое число $l<m$ стоит правее m, иначе m будет одновременно меньше $n+1$ и больше l, стоящих левее него, что нарушает условие забавности. Правее $n+1$ стоят $n-k+1$ чисел, максимальное из которых не меньше $n-k+1$, следовательно, правее $n+1$ стоят в точности числа $n-k+1, n-k+2,...,2,1$ в убывающем порядке. Тогда левее $n+1$ в некотором порядке расположено $k-1$ число $n-k+2, n-k+3,...,n$. Очевидно, что условие забавности для них выполнено, поэтому они представляют собой забавную перестановку $k-1$ чисел. По предположению индукции, при $k \ge 2$ число таких перестановок равно 2^{k-2}, числа правее $n+1$ располагаются единственным образом, следовательно, количество забавных перестановок $n+1$ числа, в которых $n+1$ стоит на месте $k = 2,3,...,n+1$ равно 2^{k-2}. Кроме того, если в забавной перестановке число $n+1$ стоит на первом месте, то, как было показано, она равна $n+1,n,...,2,1$. Значит, общее количество забавных перестановок $n+1$ числа равно сумме $1+1+2^1+...+2^{n-1} = 2^n = 2^{(n+1)-1}$, что завершает доказательство шага индукции.

Критерии проверки решения 4. (●) Проверка базы индукции**:** 1 балл.

(●) Сформулировано (1 балл) и доказано (2 балла), что правее $n+1$ стоят числа $n-k+1, n-k+2,...,2,1$**:** в сумме 3 балла.

(●) Сформулировано и обосновано, что левее $n+1$ расположено $k-1$ число, образующее забавную перестановку**:** 1 балл.

(●) Доказано, что количество забавных перестановок $n+1$ числа, в которых $n+1$ стоит на месте k равно 2^{k-2}**:** 1 балл.

(●) Доказан шаг индукции, что количество забавных перестановок $n+1$ числа равно сумме $1+1+2^1+...+2^{n-1} = 2^n = 2^{(n+1)-1}$**:** 1 балл.

11.4. Пусть H – точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC, точка M- середина стороны AC. На стороне AB выбрана точка K такая, что прямая BH делит отрезок CK пополам. Доказать, что отрезки MH и CK перпендикулярны.

Доказательство. Обозначим точку пересечения отрезков CK и BH за P. Отметим на луче BH точку T такую, что P является серединой отрезка BT. Диагонали BT и CK четырёхугольника BCTK делятся точкой пересечения р пополам, поэтому он является параллелограммом, его стороны BK и CT параллельны и величина угла CTB равна величине угла KBT, то есть 90°- A Величина угла CBT равна 90°-C. В треугольнике AHC величины углов HAC и HCA тоже равны 90°- C и 90°-A, следовательно, треугольники AHC и BCT подобны. Их соответствующие стороны AC и BT перпендикулярны, а отрезки MH и CP являются медианами этих треугольников, проведёнными к соответствующим сторонам, поэтому тоже перпендикулярны, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. (●) Доказано подобие треугольников AHC и BCT: 4 балла.

11.5. Доказать, что для любых действительных чисел x, y, z из интервала $[0,1]$ выполнено неравенство $\frac{x+y}{2+z}+\frac{x+z}{2+y}+\frac{y+z}{2+x}\le 2$.

Доказательство 1. По условию, все числа неотрицательны и не превосходят 1 следует, что их попарные суммы $x+y, x+z, y+z$ не больше 2. Заменим в знаменателе каждой дроби левой части неравенства 2 на соответствующую сумму, от чего каждый знаменатель не увеличится и неравенство усилится. Получим: $\frac{x+y}{2+z}+\frac{x+z}{2+y}+\frac{y+z}{2+x}\le\frac{x+y}{x+y+z}+\frac{x+z}{x+z+y}+\frac{y+z}{y+z+x}=\frac{2(x+y+z)}{x+y+z}=2$, что и требовалось доказать.

Доказательство 2. Приведём неравенство к общему знаменателю. В левой части получим:

$(x+y)(2+y)(2+x)+(x+z)(2+z)(2+x)+(y+z)(2+z)(2+y)=$
$x^2y+y^2x+2x^2+2y^2+4xy+4x+4y+x^2z+z^2x+2x^2+2z^2+4xz+4x+4z+y^2z+z^2y+2y^2+$
$2z^2+4yz+4y+4z=(x^2y+xy^2+\ldots)+4(x^2+y^2+z^2)+4(xy+xz+yz)+8(x+y+z)$.

В правой части получим: $2(2+x)(2+y)(2+z)=16+4(xy+xz+yz)+8(x+y+z)+2xyz$.

Слагаемые $4(xy+xz+yz)$ и $8(x+y+z)$ сокращаются, получаем неравенство (*) $(x^2y+xy^2+\ldots)+4(x^2+y^2+z^2)\le 16+2xyz$, эквивалентное неравенству из условия задачи. В силу симметрии можно считать, что $0\le x\le y\le z\le 1$, поэтому слагаемые x^2y и xy^2 в левой части не превосходят xyz, а остальные 16 слагаемых не больше 1. Следовательно, сумма всех 18 слагаемых левой части не больше $16+2xyz$, то есть .правой части. Неравенство доказано.

Критерии проверки. (●) Продвижение - о втором доказательстве получение неравенства (*): 3 балла.