10 класс

Решения всех заданий оцениваются из 7 баллов

10.1. Из Пахомово в Воробьёво шёл Иван. Ровно в полдень, когда он преодолел 4/9 всего пути, вдогонку ему из Пахомово выехал велосипедист Фома, а навстречу ему из Воробьёво вышел Ерёма. Фома обогнал Ивана в 13 часов, и встретил Ерёму в 13 часов 30 минут. Когда встретятся Иван и Ерёма?

Ответ. В 14 часов 30 минут

Решение. Обозначим расстояние от Пахомово до Воробьёво за Р, а скорости участников перфоманса за И, Ф и Е км в час соответственно, по первым буквам имён. Тогда по условию, Фома и Иван движутся в одном направлении, а Фома и Ерёма – навстречу, и в полдень их разделяют: первую пару 4/9 Р, а вторую – ровно Р. Составляем уравнения $\frac{4/9\cdot P}{\Phi - И}=1$, $\frac{P}{\Phi + E}=\frac{3}{2}$, откуда $И + E = \frac{2P}{3}-\frac{4P}{9}=\frac{2P}{9}$ и время, за которое Иван и Ерёма преодолеют разделяющие их 5/9 Р, двигаясь навстречу, равно $\frac{5P/9}{2P/9}=\frac{5}{2}$. Значит, встретятся они в $12+2{,}5=14{,}5$ часов = 14 часов 30 минут.

Критерии проверки. Угадан ответ с проверкой: 1 балл. Выписана верная система уравнений (но не решена): 3 балла.

10.2. Пусть x, y, z - действительные числа такие, что $(x+y+z)(xy+yz+xz)=xyz$. Докажите, что среди чисел x, y, z обязательно найдутся два, сумма которых равна нулю.

Доказательство. Раскроем скобки в выражении из условия, получим $(x+y+z)(xy+yz+xz)=3xyz+x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+z^2y+zy^2=xyz$, откуда $2xyz+x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+z^2y+zy^2=0$.

Условие, что среди x, y, z обязательно найдутся два, сумма которых равна нулю эквивалентно равенству нулю произведения $(x+y)(y+z)(x+z)$. Раскрываем в нём скобки, получаем в точности полученное в предыдущем абзаце выражение $2xyz+x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+z^2y+zy^2$, равное нулю по условию.

Критерии проверки.

10.3. Набор из 35 прямоугольников, не являющихся квадратами, длины сторон которых являются целыми числами, таков, что из них можно составить 9 квадратов размера 10 см на 10 см. Докажите, что из прямоугольников этого набора можно составить два прямоугольника, площади которых различаются не более, чем 80 см². В обоих случаях используются все прямоугольники набора.

Доказательство. Прямоугольников в наборе всего 35, поэтому как минимум один из 9 квадратов 10 на 10 будет составлен не более, чем из трёх прямоугольников (и, по условию, не менее, чем из двух). Квадрат имеет 4 вершины, поэтому минимум две из них будут принадлежать одному из этих прямоугольников. значит длина одной из его сторон равна 10 см, а другая целочисленная и равна x, где $1\le x\le 9$, так как этот прямоугольник меньше квадрата. Сложим из оставшихся прямоугольников два равных прямоугольника размера 10 см на 40 см (это по 4 квадрата 10 на 10, всего 8 штук), прямоугольник размера 10 на x приложим к одному из них, а остаток от квадрата, имеющий размер 10 на $10-x$ - к другому. Разность их площадей равна $10(40+x)-10(40+10-x)=10(2x-10)$. что по модулю не больше 80, так как $1\le x\le 9$.

Критерии проверки. Показано, что как минимум один из 9 квадратов 10 на 10 будет составлен не более, чем из 3 прямоугольников: 1 балла.

Доказано, что найдётся прямоугольник со стороной 10 см: 2 балла.

Доказано, что вторая сторона этого прямоугольника имеет длину x, где $1 \le x \le 9$: 1 балл. Схема построения прямоугольников, площади которых различаются не более, чем 80 см²: 2 балла. Явное доказательство того, что при этой схеме разность площадей прямоугольников действительно не больше 80 см²: 1 балл.

10.4. Собственным делителем натурального числа называется любой его делитель, отличный от 1 и самого числа. Найти все натуральные числа, у которых максимальный собственный делитель на 2 больше квадрата минимального собственного делителя.

Ответ. $n=12$ и $n=33$.

Решение. Обозначим искомое число за n, а его минимальный собственный делитель, являющийся простым числом - за p. Наибольший собственный делитель n равен $\frac{n}{p}$, что по условию равно p^2+2, следовательно, n имеет вид $n=p(p^2+2)$, причём p - его минимальный собственный делитель. Последнее равносильно тому, что число p^2+2 не имеет собственных делителей меньших, чем p. Очевидно, это верно для $p=2, n=12$ и $p=3, n=33$. Любое простое число, большее 3, при делении на 3 даёт остаток 1 или 2, следовательно его квадрат при делении на 3 лаёт остаток 1, а после прибавления 2 делится на 3. Поэтому минимальным собственным делителем числа $n=p(p^2+2)$ при $p>3$ будет 3, а не p, и оно не удовлетворяет условию задачи.

Критерии проверки. Замечено, что минимальный собственный делитель n является простым числом p: 1 балл.

Замечено, что максимальный собственный делитель n является числом $\frac{n}{p}$: 1 балл.

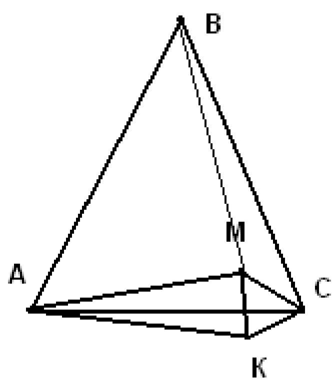
Нахождение формулы $n=p(p^2+2)$: 1 балл.

Указание ответа в виде $n=p(p^2+2)$, где p - произвольное простое число: 3 балла.

Если обнаружено, что не все простые p подходят и делаются попытки отбраковки, не доведённые до верного ответа: плюс ещё1 балл.

За каждый найденный подбором верный ответ с проверкой: по 1 баллу. Всего только за угаданные ответы 2 балла.

10.5. Докажите, что для любой точки М внутри равностороннего треугольника АВС такой, что величина угла АМС равна 150º, из отрезков МА, МВ и МС можно составить прямоугольный треугольник.



Доказательство. Построим на отрезке СМ равносторонний треугольник СМК так, чтобы его вершина К лежала ниже стороны АС. Углы АСВ и МСК равны по 60º, поэтому равны углы АСК и ВСМ. Следовательно, треугольники АСК и ВСМ равны по парам равным парам сторон АС=ВС и СМ=СК и равным углам АСК и ВСМ между ними. Значит, в этих треугольниках равны и третьи соответствующие стороны АК и ВМ. Таким образом. в треугольнике АМК длины сторон АМ, МК и АК равны соответственно длинам отрезков АМ, МС и МВ, а угол АМК равен разности углов АМС и КМС, то есть 150º-60º=90º. Требуемый в условии прямоугольный треугольник построен.

Критерии проверки. Идея построения треугольника КМС: 2 балла. Доказательство равенства треугольников АСК и ВСМ: 2 балла.