10 класс
Решения всех заданий оцениваются из 7 баллов

10.1. На шахматной доске 8 на 8 отмечены две произвольные клетки. Верно ли, что доску всегда можно разрезать по линиям сетки на две одинаковых части, каждая из которых содержит по одной отмеченной клетке?

Ответ. Да.

Решение. Сначала разделим доску двумя средними линиями сетки на 4 квадрата 4 на 4 клетки. Если отмеченные клетки лежат в разных квадратах, то разрезав доску вдоль одной из средних линий, получим требуемое разбиение. Пусть теперь обе отмеченные клетки лежат в одном квадрате 4 на 4, можно считать его левым нижним. Либо номера горизонталей отмеченных клеток, либо номера их вертикалей должны различаться. В первом случае проведём в квадрате 4 на 4 горизонтальную линию сетки AB, относительно которой одна отмеченная клетка лежит ниже, а другая – выше. Затем проведём в правом верхнем квадрате 4 на 4 доски горизонтальную линию сетки CD, симметричную AB относительно центра доски. Разрез доски по линиям сетки вдоль ломаной ABCD разбивает доску на две части, симметричных относительно центра доски, следовательно, равных. По построению. каждая из них содержит по одной отмеченной клетке. Случай, когда различаются номера вертикалей отмеченных клеток, рассматривается аналогично, здесь в качестве AB выступает разделяющая их вертикаль левого нижнего квадрата 4 на 4, а CD – отрезок сетки, симметричный AB относительно центра..

Критерии проверки. (●) Рассмотрен только случай, когда отмеченные клетки лежат в разных квадратах 4 на 4**:** 1 балл.

В случаях неочевидных разрезаний доски необходимо доказательство равенства частей. Неверный ответ и разрезания на равновеликие части не оцениваются.

10.2. Найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять натуральные числа x, y, z, такие, что можно записать по кругу в некотором порядке $x \geq 1$ раз букву A, $y \geq 1$ раз букву B и $z \geq 1$ раз букву C так, чтобы никакие две одинаковые буквы не были написаны рядом (не были соседними).

Ответ. Каждое из чисел x, y, z не больше суммы двух других.

Решение. 1) Необходимость условия. По условию, между каждыми двумя ближайшими буквами A на круге должна быть хотя бы одна из букв B или C. Поэтому суммарное количество $y+z$ букв B и C не меньше, чем количество x букв A. Аналогично с остальными буквами.

2) Достаточность условия. Пусть каждое из чисел x, y, z не больше суммы двух других. Можно считать $x \leq y \leq z$, тогда условие эквивалентно единственному неравенству $x + y \geq z$. Запишем сначала по кругу все z букв C, затем, начиная с некоторой «первой», будем, двигаясь по часовой стрелке, вставлять между буквами C по одной букве B, пока они не кончатся. Ввиду того, что букв B

не больше, чем букв C, они закончатся не позже, чем перед первой буквой C, и соседних букв B не появится. Между каждыми ближайшими буквами B будет стоять буква C. После окончания букв B продолжим тот же процесс с буквами A, которые будем писать сразу после очередной C или сочетания CB, если мы уже прошли полный оборот и достигли места, следующего за первой вставленной B. Ввиду того, что $x+y\geq z$, в сумме букв B и A хватит, чтобы вставить их между всеми буквами C, пройдя не меньше, чем полный оборот. С другой стороны, букв A не больше, чем букв B, они закончатся не позже, чем перед последней буквой B, и соседних букв A тоже не появится. Скажем, если каждой буквы будет поровну, по кругу будет x раз записано сочетание из трёх букв CBA.

Критерии проверки. (●) Доказана необходимость условия $x+y\geq z$: 2 балла. (●) Сформулирован алгоритм правильной записи букв при соблюдения условия: 2 балла. (●) Обосновано, что при применении алгоритма не возникает соседних букв С: 1 балл. (●) Обосновано, что при применении алгоритма не возникает соседних букв В: 1 балл. (●) Обосновано, что при применении алгоритма не возникает соседних букв А: 1 балл.

10.3. Треугольник ABC равнобедренный, с равными сторонами AC и BC. На дуге BC его описанной окружности, не содержащей вершину A, отметим произвольную точку D, отличную от B и C. Обозначим за E точку пересечения прямых CD и AB. Доказать, что прямая BC касается описанной окружности треугольника BDE.

Доказательство. Утверждение задачи равносильно тому, что угол BDE, опирающийся в описанной окружности одноименного треугольника на хорду BE, равен углу между хордой BE и прямой CB – предполагаемой касательной к этой окружности. Угол BDE является смежным со вписанным углом BDC описанной окружности исходного треугольника ABC. Во вписанном в эту окружность четырёхугольнике ACDB углы BDC и BAC являются противоположными, поэтому их сумма равна 180°. Следовательно, угол BDE равен углу BAC, а тот, в силу равнобедренности треугольника ABC, равен углу CBA, вертикальному с углом между хордой BE и прямой BC. Значит, последний угол равен углу BDE, что и требовалось доказать.

Критерии проверки.

10.4. Пусть для действительных чисел x, y, z, выполннено неравенство: $x+y+z\geq xyz$. Доказать, что для них выполнено и неравенство $x^2+y^2+z^2\geq xyz$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что при $t\leq 0$ и $t\geq 1$ выполнено неравенство $t^2\geq t$. В силу симметрии далее можно считать, что $x\leq y\leq z$.

1) Докажем неравенство в случае, когда все переменные неотрицательны, то есть $0\leq x\leq y\leq z$. Если при этом $0\leq x\leq 1$, то $x^2+y^2+z^2\geq z^2\geq xyz$ и неравенство доказано. Если $1\leq x\leq y\leq z$, то $x^2+y^2+z^2\geq x+y+z\geq xyz$ - тоже доказано.

2) Пусть теперь среди переменных есть отрицательные. Если их одна или три, то $x^2+y^2+z^2\geq 0\geq xyz$. Остался случай $x\leq y<0\leq z$. Тогда

$|x|+|y|+z > x+y+z \geq xyz = |x||y|z$, то есть первое неравенство из условия выполнено для тройки $0 \leq |x|,|y|,z$. С учётом того, что второе неравенство условия для неотрицательных значений переменных уже доказано, получаем: $x^2+y^2+z^2 = |x|^2+|y|^2+z^2 \geq |x||y|z = xyz$ - оно выполнено и для рассматриваемой тройки $x \leq y < 0 \leq z$.

Критерии проверки. (●) Требуемое неравенство доказано для $0 \leq x \leq 1 \leq y \leq z$: 2 балла. (●)Требуемое неравенство доказано для $1 \leq x \leq y \leq z$: 1 балл. (●)Требуемое неравенство доказано для случая трёх или одной переменной меньше 0: 1 балл. (●) Требуемое неравенство доказано для $x \leq y < 0 \leq z$: 3 балла.

Замечание. При похожих схемах доказательства проверка выполнимости первого неравенства условия $|x|+|y|+z > x+y+z \geq xyz = |x||y|z$ в последнем пункте является необходимой. Если это не сделано, за него ставим 1 балл.

10.5. Какие натуральные числа n можно представить в виде $n=[a,b]+[a,c]+[b,c]$ для некоторых натуральных a,b,c? Здесь $[x,y]$ обозначает наименьшее общее кратное натуральных чисел x и y.

Ответ. При всех n, не являющихся степенями двойки.

Решение. 1) Пусть $a=2^k \cdot a_1, a=2^l \cdot b_1, a=2^m \cdot c_1$, где числа a_1,b_1,c_1 - нечётны. В силу симметрии можно считать, что $k \leq l \leq m$. Тогда $[a,b]=[2^k \cdot a_1, 2^l \cdot b_1]=2^l[a_1,b_1]$, $[c,b]=[2^m \cdot c_1, 2^l \cdot b_1]=2^m[c_1,b_1]$, $[a,c]=[2^k \cdot a_1, 2^m \cdot c_1]=2^m[a_1,c_1]$, где числа $[a_1,b_1],[c_1,b_1],[a_1,c_1]$ - тоже нечётные. Тогда $[a,b]+[a,c]+[b,c]=2^l([a_1,b_1]+2^{m+1-l}\cdot\frac{[a_1,c_1]+[c_1,b_1]]}{2})$, где число в скобках нечётно и больше 1, так как показатель $m+1-l$ степени двойки во втором слагаемом не меньше 1. Следовательно, сумма попарных наименьших кратных трёх натуральных чисел не может равняться степени двойки.

2) Пусть теперь $n=2^s(2t+1)$, где $2t+1$ - максимальный нечётный делитель n. Положим $a=1, b=2^s, c=2^s \cdot t$, тогда $[a,b]=2^s, [a,c]=2^s \cdot t=[b,c]$ и $[a,b]+[a,c]+[b,c]=2^s+2^s \cdot t+2^s \cdot t=2^s \cdot (2t+1)=n$, то есть n представляется в виде суммы попарных наименьших кратных трёх натуральных чисел.

Критерии проверки. (●) Доказано, что искомые числа не являются степенями двойки: 3 балла. (●) Доказано, что все числа, не являющиеся степенями двойки, можно представить в требуемом виде: 4 балла. (●) Продвижение: введены обозначения $a=2^k \cdot a_1, a=2^l \cdot b_1, a=2^m \cdot c_1$, и найдены правильно наименьшие общие кратные этих чисел: 1 балл.