Олимпиада школьников «Шаг в будущее»
Заключительный этап
Вариант: 5 Класс: 9

Задача 1 *(5 баллов).* Две материальные точки находятся в покое на расстоянии *L* друг от друга. Они начинают одновременно равноускорено двигаться в одну сторону вдоль линии, их соединяющей. Ускорение точки, находящейся позади, равно *a*. Какое максимальное ускорение должна иметь первая точка, чтобы ее могла догнать вторая за время, не превышающее τ?

Решение:
Поместим начало отсчета в первоначальное положение первой точки. Тогда начальная координата второй точки будет равна – *L*. Ускорение первой точки может быть вычислено из условия

$$\frac{a\tau^2}{2} - L = \frac{a_1\tau^2}{2}$$

и

$$a_1 = a - \frac{2L}{\tau^2}.$$

Ответ: $a_1 = a - \frac{2L}{\tau^2}$.

Критерии оценивания решения:

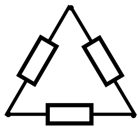
Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Выполнен чертеж, выбрана система отсчета	**1**
Правильно записано условие встречи частиц	**2**
Получен результат, но есть ошибки в преобразованиях при получении конечной формулы	**1**
Задание выполнено полностью, получен результат в общем виде	**1**
Всего баллов	**5**

Задача 2 *(5 баллов).* На крышке маленького черного ящичка находятся три клеммы A, B, C, а внутри - схема, собранная из трех резисторов сопротивлением 20 Ом, 30 Ом и 50 Ом. Сопротивление между клеммами A и B равно R_{AB} = 16 Ом, между клеммами A и C R_{AC} =25 Ом. Чему равно сопротивление между клеммами B и C? Нарисуйте схему соединения резисторов в черном ящике.

Решение:
Возможно 24 разных схем с подключенными 3 резисторами и всеми задействованными клеммами: по 6 вариантов «звезды», «треугольника», с двумя параллельно соединенными и с двумя последовательно соединенными резисторами. Очевидно, что перебирать все варианты не нужно. Сузим круг поиска. 16 Ом можно получить, соединяя параллельно один из резисторов с другим или с двумя последовательно соединенными другими. Из небольшого числа вариантов остается, что 16 Ом получается при параллельном соединении резистора 20

Ом с двумя другими, соединенными последовательно. Получается соединение «треугольником».
25 Ом можно получить, соединяя две ветви по 50 Ом параллельно. Таким образом, схема соединения выглядит так, а сопротивление

$$R_{BC} = \frac{30(20+50)}{30+(20+50)} = 21 \text{ Ом}$$



Ответ.

$$R_{BC} = \frac{30(20+50)}{30+(20+50)} = 21 \text{ Ом}$$

Соединение треугольником.

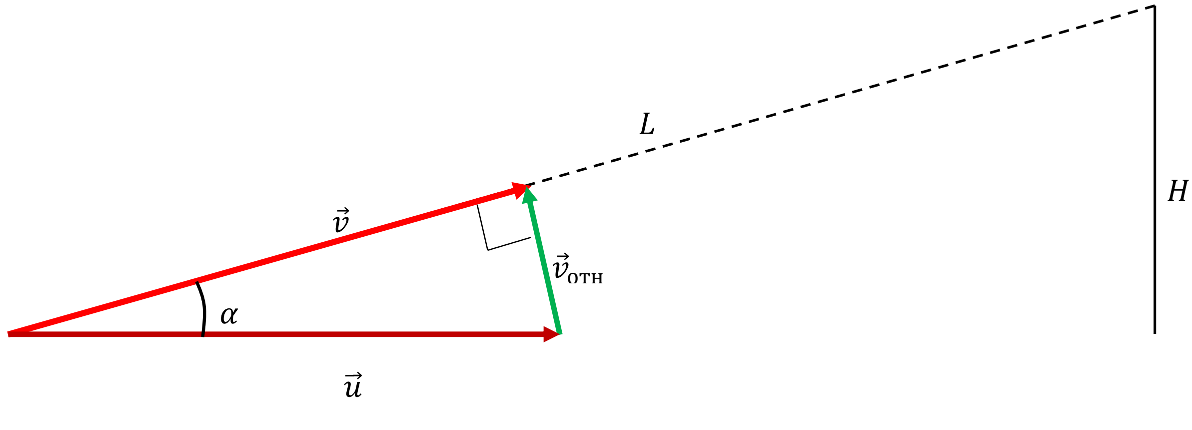
Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Проведены рассуждения о том, как можно получить 16 Ом	**1**
Проведены рассуждения о том, как можно получить 25 Ом	**1**
Правильно нарисована электрическая схема	**2**
Правильно определено сопротивление между клеммами B и C	**1**
Всего баллов	**5**

Задача 3 *(8 баллов)*. Лодочник переправляется через реку, двигаясь с минимальной относительно воды скоростью, под углом $\alpha = 15°$ к течению, в системе отсчета, связанной с берегом. Скорость течения $u = 1{,}2$ м/с. Вся переправа занимает $\tau = 12$ мин. Определить ширину реки.

Решение:

Запишем и изобразим на векторной диаграмме закон сложения скоростей для движения лодки, в качестве подвижной системы отсчета выберем воду:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{u}.$$



P

Поскольку u и α заданы, для того чтобы относительная скорость была минимальна, она должна быть перпендикулярна абсолютной траектории лодки (рис. 2). Также из рисунка видим, что

$$v = u\cos\alpha.$$

Путь лодки относительно берега

$$L = v\tau.$$

С другой стороны

$$H = L\sin\alpha.$$

Решая полученную систему, находим

$$H = \frac{u\tau}{2}\sin 2\alpha = 216 \text{ м}.$$

Ответ: $H = \frac{u\tau}{2}\sin 2\alpha = 216$ м.

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Записан закон сложения скоростей и нарисована векторная диаграмма.	2
Указано и обосновано направление минимальной относительной скорости.	2
Получена система уравнений, достаточная для дальнейшего решения.	2
Получен верный ответ в общем виде.	1
Получен верный численный ответ.	1
Всего баллов	**8**

Задача 4 *(8 баллов)*. Во время циркового представления пони Карамелька бегает по краю арены, изменяя свою скорость по команде дрессировщика. 2/3 круга она бежит так, что ее радиус-вектор (радиус, проведенный из центра арены в точку, где в данный момент находится пони) поворачивается со скоростью $\omega_1 = 19°/\text{с}$ (градусов за секунду). Затем 3/4 круга радиус-вектор Карамельки поворачивается со скоростью $\omega_2 = 35{,}3°/\text{с}.$ Затем он снова 2/3 круга поворачивается со скоростью ω_1, затем снова 3/4 круга со скоростью ω_2 и т. д. Средняя линейная скорость (путь в единицу времени) пони за время от начала движения до пробега трёх полных кругов на выступлении в цирке равна 2,8 м/с. Найдите радиус цирковой арены.

Решение:

Два участка, пробегаемых с угловой скоростью ω_2 (угол поворота в единицу времени) составят 6/4=3/2 круга. Два участка, пробегаемых со скоростью ω_1 составят 4/3 круга. Вместе они составят

$$\frac{4}{3} + \frac{3}{2} = \frac{17}{6} \text{ круга}.$$

Следовательно, оставшуюся 1/6 круга спортсмен пробежит с угловой скоростью ω_1. В свою очередь

$$\frac{4}{3} + \frac{1}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

Таким образом, в итоге пони пробежит 3/2 круга с угловой скоростью ω_1 и 3/2 круга с угловой скоростью ω_2. Тогда средняя угловая скорость спортсмена

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{3\varphi_0}{\frac{\varphi_1}{\omega_1} + \frac{\varphi_2}{\omega_2}},$$

где $\varphi_0 = 360°$, $\varphi_1 = \frac{3}{2}\varphi_0$, $\varphi_2 = \frac{3}{2}\varphi_0$. Подставляя φ_1 и φ_2 в последнее соотношение и проведя необходимые преобразования, получим

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_2 + \omega_1}.$$

Зная среднюю линейную скорость, найдем радиус арены

$$v_{\text{ср}} = \frac{3 \cdot 2\pi R}{\frac{3\varphi_0}{\omega_{\text{ср}}}} = \frac{2\pi R\omega_{\text{ср}}}{\varphi_0} = \frac{\pi R\omega_{\text{ср}}}{180°}.$$

Подставив сюда найденное значение $\omega_{\text{ср}}$, получим

$$v_{\text{ср}} = \frac{\pi\omega_1\omega_2 R}{90°(\omega_2 + \omega_1)}.$$

Тогда искомый радиус равен

$$R = \frac{90°(\omega_2 + \omega_1)v_{\text{ср}}}{\pi\omega_1\omega_2}.$$

Численный расчет

$$R = \frac{90°(19 + 35{,}3)2{,}8}{3{,}14 \cdot 19 \cdot 35{,}3} \cong 6{,}497 \cong 6{,}5\ (\text{м})\ .$$

Ответ: $R = \frac{90°(\omega_2+\omega_1)v_{\text{ср}}}{\pi\omega_1\omega_2} \cong 6{,}5\ (\text{м})$.

Критерии оценивания задачи

Выполнение	**Балл**
Определено, что с угловой скоростью ω_2 пони пробежит 3/2 круга	1
Определено, что с угловой скоростью ω_1 спортсмен пробежит 3/2 круга	1
Определена средняя угловая скорость движения спортсмена	2
Записана формула для средней линейной скорости	2
Получен ответ в общем виде (в каком-либо из вариантов)	1
Получен верно округленный численный ответ с указанием единицы измерения.	1
Всего баллов	**8**

Задача 5 *(12 баллов)*. Вода в самоваре, КПД которого равен 70%, нагрелась за 150 с. При этом на нагревание воды потребовалось в 4 раза больше энергии, чем на нагревание самовара, хотя их начальные и конечные температуры одинаковы. За какое время самовар с водой остынет до первоначальной температуры?

Решение:

КПД самовара $\eta = \frac{Q_{\text{полезн.}}}{Q_{\text{затр.}}} \cdot 100\%$

$Q_{\text{полезн.}}$ – количество теплоты, пошедшее на нагревание воды. $Q_{\text{полезн.}} = Q_{\text{воды.}}$

$Q_{\text{затр.}}$ – количество теплоты, выделенное нагревателем самовара.

$Q_{\text{затр.}} = Q_{\text{нагр.}} + Q_{\text{тер.}}$

$Q_{\text{нагр.}} = Q_{\text{воды}} + Q_{\text{самовара}}$

$Q_{нагр.}$ – количество теплоты, пошедшее на нагревание воды и самовара.

$Q_{тер.}$ – количество теплоты, рассеянное в окружающее пространство при нагревании.

$Q_{тер.} = q \cdot t_1$; где q – теплота, отдаваемая в окружающее пространство в единицу времени, t_1=150 с

$Q_{самовара} = 0{,}25\ Q_{воды}$. Тогда $Q_{нагр.} = 1{,}25\ Q_{воды}$.

$Q_{воды}. = 0{,}8\ Q_{нагр.}$

С другой стороны, при охлаждении воды и самовара выделяется за время t_2 теплота $Q_{нагр.}$

$Q_{нагр.} = q \cdot t_2 \Rightarrow q = Q_{нагр.} / t_2$

Тогда $Q_{тер} = Q_{нагр} \cdot \frac{t_1}{t_2}$

$$Q_{затр} = Q_{нагр} + Q_{нагр} \cdot \frac{t_1}{t_2} = Q_{нагр} \cdot \frac{t_1 + t_2}{t_2}$$

$$\eta = \frac{0{,}8 Q_{нагр.} t_2}{Q_{нагр.}(t_1 + t_2)} \cdot 100\%$$

$$t_2 = \frac{\eta t_1}{0{,}8 - \eta} = 1050\ \text{с} = 17{,}5\ \text{мин}$$

Ответ: $t_2 = 1050\ \text{с} = 17{,}5\ \text{мин}$

Выполнение	**Балл**
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала не верно	0
Записана формула для КПД самовара	1
Записана формула $Q_{затраченная}$	2
Записана формула теплоты, израсходованной на нагревание воды и самовара, $Q_{нагр}$	2
Записана формула $Q_{теряемая}$	2
Получена связь $Q_{нагр}$ и $Q_{теряемая}$	2
Найдена полезная теплота	1
Верно получена итоговая формула	1
Верно получен численный ответ	1
Всего	**12**

Задача 6 *(12 баллов).* В теплоизолированный сосуд налит некоторый объем воды. В воду погрузили закрытую пробирку с шариком льда при температуре 0°C. Как только лед растаял пробирку вынули, а воду быстро перемешали. При этом оказалось, что температура воды понизилась на 1°C. Затем талую воду из пробирки добавили в сосуд. После того как в сосуд друг за другом бросили еще 5 таких же шариков в нем установилась температура 11°C. Определить начальную температуру воды. Теплоемкостью сосуда и пробирки пренебречь.

Решение:

Уравнение теплового баланса для таяния льда

$$\lambda m_л = c m_в |\Delta t|.$$

Для всего теплообмена:

$$(n+1)(\lambda + ct)m_л = c m_в (t_0 - t),$$

где $n = 5$ — количество шариков после первого. Поделив второе уравнение на первое, после необходимых преобразований получаем ответ:

$$t_0 = t + (n+1)\left(1 + \frac{c}{\lambda}\right)|\Delta t| = 17{,}84 \cong 18\ (^\circ\text{C}).$$

Критерии оценивания задачи

Выполнение	Балл
Записано уравнение теплового баланса для таяния льда.	3
Записано уравнение теплового баланса для всего теплообмена.	3
Предприняты шаги по решению полученной системы.	2
Получен верный ответ в общем виде.	2
Получен верный численный ответ с указанием единицы измерения.	2
Всего	**12**