

Олимпиада школьников "Шаг в будущее"

Профиль: математика.

Вариант: 3

Класс: 8

Задача 1 (15 баллов). Найдите все значения параметра a , при которых выполнено

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 2, \text{ где } x_1, x_2 \text{ – корни уравнения } 2x^2 - (a + 2)x - 2a - 4 = 0.$$

Задача 2 (15 баллов). Найдите все значения x и y , при которых выполнены оба уравнения

$$x\sqrt{2\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 9 + 4\sqrt{3}} - 2y = y\sqrt{(1 - \sqrt{6} - \sqrt{2})^2}; xy = 6 + 2x - 3y$$

Задача 3 (15 баллов). В трапеции $ABCD$ $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$. Точка E принадлежит AB так, что $AB \perp DE$. Найти площадь $\triangle ECD$, если $ED=6$, $CD=5$.

Задача 4 (15 баллов). При каких значениях параметра a уравнение $f(x) = a$ имеет единственное решение, если известно, что

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}, \text{ если } x \in [0; 5];$$

$$f(x) = x^2 - 2, \text{ если } x \in (-3; 0);$$

$$f(x) = 3x + 16, \text{ если } x \in (-4; -3]?$$

Задача 5 (20 баллов). В равнобедренном $\triangle ABC$ с основанием BC проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке B_1 , сторону BC в точке A_1 , а продолжение стороны AC за точку C в точке C_1 так, что $\triangle BA_1C_1$ равнобедренный с основанием BC_1 .

$$\angle A_1BC_1 = \frac{1}{2} \angle ABC, 3AB = 2BC,$$

$C_1A_1 \cap AB = B_1$. Найти отношение площади $\triangle AB_1A_1$ к площади $\triangle CA_1C_1$.

Задача 6 (20 баллов). Тренер детской команды сноубордистов взял на соревнование два вида твердых парафинов для обеспечения хорошего сцепления и легкого скольжения. Это бруски одинаковой длины, но разной контактной площади. По опыту прошлых соревнований тренер знает, что бруска с большей контактной площадью хватает на три часа непрерывной работы. На этот раз тренер решил взять помощника. Они вместе начали работать разными брусками-парафинами и к концу соревнования от большего бруска остался вдвое больший кусок, чем от меньшего. На сколько часов рассчитан брусок меньшей контактной площади, если соревнование длилось 2 часа?

Олимпиада школьников "Шаг в будущее"

Профиль: математика.

Вариант: 4

Класс: 8

Задача 1 (15 баллов). На занятии математического кружка Антон предложил отгадать задуманную им обыкновенную дробь и дал 2 подсказки. Если числитель дроби оставить без изменения, а знаменатель возвести в квадрат, то получится дробь, равная $1/9$. Если же числитель дроби увеличить на 1, а знаменатель уменьшить на 1, то получится дробь, равная 1. Через некоторое время ученики попросили еще подсказку. Узнав, что эта дробь больше, чем $1/2$, дали ответ. Какую дробь задумал Антон? В ответ записать дробь без сокращений.

Задача 2 (15 баллов). Найдите все варианты троек $(x; y; z)$, при которых выполняется уравнение

$$\sqrt{|2x| + |x - 6|} + \sqrt{|2y| \cdot |2 - x|} + \sqrt{|2z| + |x - 2| \cdot |x + 6|} = 0$$

Задача 3 (15 баллов). В трапеции ABCD, $AD \parallel BC$ так, $AD = 2BC$. Точка E принадлежит AB так, что $AB \perp DE$. Найти периметр $\triangle ECD$ если $ED = m$, $CD = n$.

Задача 4 (15 баллов). Известно, что окружность с центром $E\left(0; \frac{1}{3}\right)$ проходит через точку $K\left(\frac{1}{3}; \frac{1 + \sqrt{8}}{3}\right)$. Какую площадь имеет фигура, ограниченная этой окружностью и графиками функций $y = 3 - |x|$ и $5y - x = -9$?

Задача 5 (20 баллов). На стороне AC равнобедренного $\triangle ABC$ с основанием BC взята точка A_1 , а на продолжении стороны BC за точку C точка C_1 так, что $\triangle BA_1C_1$ равнобедренный с вершиной в точке A_1 .

$$\angle A_1BC_1 = \frac{1}{2} \angle ABC, 3AB = 2BC, C_1A_1 \cap AB = B_1.$$

Найти отношение площади $\triangle ABC$ к площади $\triangle BB_1C_1$.

Задача 6 (20 баллов). На горно-обогатительный комбинат привозят руду с трех месторождений. Хранилища комбината имеют фиксированный объём. На месторождениях работают люди и техника - невыгодно, чтобы они простаивали. У каждого месторождения своя система доставки, поэтому скорости доставки различны. Управляющий рассчитывает оптимальные способы подвоза руды, чтобы хранилище было заполнено рудой с разных месторождений. Выяснилось, что можно принимать руду со всех трех месторождений сразу в течение 4 часов. Второй вариант заполнения: с первого месторождения возить руду в течение 6 часов, со второго и третьего в течение 2 часов. Проверяется еще один вариант: возить с первого месторождения 5 часов, со второго 3 часа. Сколько часов надо тогда подвозить руду с третьего месторождения, чтобы заполнить хранилище?