Вариант № 1 (11 класс, отборочный этап)

1. Производство керамических изделий состоит из 3 последовательных этапов: формование керамического изделия на гончарном круге в течение 15 минут, сушка в течение 10 минут, и обжиг в течение 30 минут. Требуется изготовить 75 изделий. Как распределить 13 мастеров на формовщиков и обжигальщиков для работы на 1 и 3 этапах соответственно в течение всего отведенного на этап времени (для сушки изделий рабочие не требуются), чтобы выполнить работу за кратчайшее время? В ответ запишите кратчайшее время (в минутах), необходимое для выполнения всей работы. Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

2. Решите уравнение $\frac{15}{x(\sqrt[3]{35-8x^3})}=2x+\sqrt[3]{35-8x^3}$. В ответ запишите сумму всех полученных решений. (5 баллов)

3. Найдите все натуральные значения n, при которых

$$\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cdots+\cos\frac{2\pi n}{9}=\cos\frac{\pi}{9}\text{, и } \log_2^2 n+45<\log_2 8n^{13}.$$

В ответ запишите сумму полученных значений n. (6 баллов)

4. Сколькими способами можно распилить ствол бамбука (неоднородный природный материал) длиной 4 м на три части, длины которых кратны 1 дм, и из которых можно составить треугольник? (12 баллов)

5. Сколько решений в натуральных числах $x,\ y$ имеет неравенство $x/76+y/71<1$? (12 баллов)

6. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник, координаты вершин которого удовлетворяют уравнению

$|y+1|(y^2+2y+28)+|x-2|=9(y^2+2y+4)$, а стороны параллельны осям координат? (12 баллов)

7. Вписанная в треугольник *ABC* окружность радиуса 3 касается стороны *AC* в точке *D*. На продолжениях сторон *AC* и *BC* за точку *C* взяты точки *K* и *L* соответственно, угол *CKL* равен 30°. Длины отрезков *AK* и *BL* равны полупериметру треугольника *ABC*. На описанной около треугольника *ABC* окружности выбрана точка *M* так, что *CM* || *KL*. Найдите косинус угла *ACB*, если длина отрезка *DM* равна 6. (16 баллов)

8. Укажите наименьшее значение параметра a, при котором уравнение имеет хотя бы одно решение

$$2\sin\left(\pi-\frac{\pi x^2}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\sqrt{9-x^2}\right)+1=a+2\sin\left(\frac{\pi}{6}\sqrt{9-x^2}\right)\cos\left(\frac{\pi x^2}{12}\right).$$ (16 баллов)

9. Ромб *ABCD* является основанием пирамиды с вершиной *S*. Все ее боковые грани наклонены к плоскости основания под одинаковым углом 60°. Точки *M*, *N*, *K* и *L* являются серединами сторон ромба *ABCD*. На прямоугольнике *MNKL*, как на основании, построен прямоугольный параллелепипед. Ребра верхней грани параллелепипеда (противоположной грани *MNKL*) пересекают боковые ребра пирамиды *SABCD*, соответственно, в точках *F*, *P*, *R* и *Q*. Объем многогранника с вершинами в точках *M*, *N*, *K*, *L*, *F*, *P*, *R*, *Q* равен $12\sqrt{3}$, а радиус вписанной в ромб *ABCD* окружности равен 2,4. Найдите сторону ромба *ABCD*. (16 баллов)

Вариант № 2 (11 класс, отборочный этап)

1. Цех выпускает изделия видов A и B. На одно изделие вида A расходуется 10 *кг* стали и 23 *кг* цветных металлов, а на изделие вида B – 70 *кг* стали и 40 *кг* цветных металлов. От реализации изделия вида A прибыль составляет 80 тысяч рублей, вида B – 100 тысяч рублей. Сменный фонд стали составляет 700 *кг*, цветных металлов – 642 *кг*. Сколько изделий видов A и B нужно выпускать за смену, чтобы получить наибольшую прибыль от продажи изделий, если расход ресурсов не должен превышать выделенных на смену фондов? В ответ запишите наибольшую прибыль (в тысячах рублей), которая может быть получена при этих условиях. Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

2. Решите уравнение $\frac{x}{3}+\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}=\frac{35}{12}$. В ответ запишите сумму всех полученных решений. (5 баллов)

3. Решите неравенство $x^2 \leq 2\left(\left[\sqrt[3]{x}+0{,}5\right]+\left[\sqrt[3]{x}\right]\right)$, где $[x]$ – целая часть числа x, т. е. $[x]$ – целое число, для которого верно неравенство $[x] \leq x < [x]+1$. В ответ запишите разность наибольшего и наименьшего решений неравенства. (6 баллов)

4. Сколькими способами можно разложить число 210 в произведение четырех натуральных чисел? Порядок сомножителей неважен. (12 баллов)

5. Последовательность задана рекуррентно:

$x_0=0,\ x_{n+1}=\frac{(n^2+n+1)x_n+1}{n^2+n+1-x_n}$. Найдите x_{8453}. (12 баллов)

6. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, координаты вершин которого удовлетворяют уравнению $|y-x|=(y+x+1)(5-x-y)$, а стороны параллельны прямым $y=x$ и $y=-x$? В ответ запишите квадрат значения найденной площади. (12 баллов)

7. Вписанная в треугольник ABC окружность радиуса 2 касается стороны AC в точке D, угол C этого треугольника равен $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8}$. На продолжениях сторон AC и BC за точку C взяты точки K и L соответственно. Длины отрезков AK и BL равны полупериметру треугольника ABC. На описанной около треугольника ABC окружности выбрана точка M так, что $CM \parallel KL$. Найдите синус угла CKL, если длина отрезка DM равна 4. (16 баллов)

8. Укажите наибольшее значение параметра p, при котором уравнение имеет хотя бы одно решение

$2\cos\left(2\pi-\frac{\pi x^2}{6}\right) cos\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{9-x^2}\right)-3=p-2\sin\left(-\frac{\pi x^2}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{9-x^2}\right)$. (16 баллов)

9. Боковая грань правильной треугольной пирамиды $SABC$ наклонена к плоскости основания ABC под углом $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. Точки M, N, K являются серединами сторон основания ABC. Треугольник MNK является нижним основанием прямой призмы. Ребра верхнего основания призмы пересекают боковые ребра пирамиды $SABC$, соответственно, в точках F, P и R. Площадь полной поверхности многогранника с вершинами в точках M, N, K, F, P, R равна $53\sqrt{3}$. Найдите сторону треугольника ABC.

(16 баллов)