Олимпиада школьников "Шаг в будущее"

Профиль: математика

Вариант: 1 Класс: 11

Задача 1 (12 *баллов*). Числа u, v, w являются корнями уравнения $x^3 - 3x - 1 = 0$. Найдите $u^9 + v^9 + w^9$.

Задача 2 (16 *баллов*). В лаборатории имеются колбы двух размеров (объемом V и объемом $V/2$) в суммарном количестве 100 штук, причем колб каждого размера не менее трех. Лаборант поочередно случайно выбирает три колбы, и первую из них полностью заполняет 80-процентным раствором соли, вторую полностью заполняет 50-процентным раствором соли, а третью колбу полностью заполняет 20-процентным раствором соли. Затем он сливает содержимое этих трех колб в одну чашу и определяет процентное содержание соли в ней. При каком наименьшем количестве больших колб N событие «процентное содержание соли в чаше находится в пределах от 45% до 55% включительно» будет случаться реже события «при случайном бросании двух симметричных монет выпадает орел и решка (в любом порядке)»? Ответ обосновать.

Задача 3 (16 *баллов*). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины сторон AB и BC равны, DB – биссектриса угла ADC, $AD:DC = 4:3$. Найдите косинус угла AKB, если K – точка пересечения диагоналей AC и BD, $BK:KD = 1:3$.

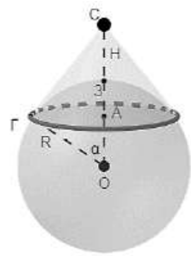
Задача 4 (16 *баллов*). Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} (ay - ax + 2)(4y - 3|x - a| - x + 5a) = 0, \\ (\log_a x^2 + \log_a y^2 - 2)\log_2 a^2 = 8 \end{cases}$$

имеет ровно шесть различных решений.

Задача 5 (20 *баллов*). Шар радиуса $\frac{4}{9}$ лежит внутри правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ со стороной основания 8 и высотой 3. Этот шар касается плоскости основания $ABCD$ пирамиды и боковых граней SBC и SCD. Плоскость γ касается шара, проходит через точку B, середину K ребра CD и пересекает ребро SC в точке M. Найдите объем пирамиды $MBCK$.

Задача 6 (20 *баллов*). В 2022 году исполняется 65 лет запуска первого искусственного спутника Земли (ИСЗ). В настоящее время для обеспечения бесперебойной работы сотовой связи, систем теле и радиовещания используются различные виды спутников, находящихся на различных орбитах, на различных высотах.



Зоной покрытия спутника назовем часть поверхности земного шара, в пределах которой обеспечивается уровень сигналов к спутнику и от него, необходимый для их приема с заданным качеством в конкретный момент времени. Как правило, эта часть поверхности ограничивается окружностью, проходящей по линии видимого горизонта. На рисунке - линия проходит через точку Г.

а) Определите площадь земной поверхности (в *км*^{2}), которая является зоной покрытия спутника, находящегося на высоте $\mathrm{H} = 500$ *км* относительно земной поверхности, считая ее сферой радиуса $\mathrm{R} = 6400$ *км* с центром в точке О.

б) Найдите все значения $n > 1$, для которых на поверхности земли можно расположить окружности $C_1, \ldots, C_n$, каждая из которых внешним образом касается окружности C_0, с центром в точке А и радиусом $r <$ R, каждая из них является границей зоны покрытия ИСЗ, находящегося на той же высоте Н, что и спутник с зоной покрытия C_0. Каждая из зон покрытия C_i должна внешним образом касаться окружностей C_0 и C_{i+1}, $i = 0,1,\ldots,n-1$, т.е. первая касается C_0 и C_2, вторая - C_0 и C_3, и т.д. Окружность C_n должна касаться C_0 и C_1.

Олимпиада школьников "Шаг в будущее"

Профиль: математика

Вариант: 4 Класс: 11

Задача 1 (12 *баллов*). Числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ задается так, что $a_1 = \log_2(\log_2 f(2))$, $a_2 = \log_2(\log_2 f(f(2)))$, ... , $a_n = \log_2(\log_2 \underbrace{f(f(\dots f}_{n}(2))))$, ... , где $f(x) = x^x$. Определите номер n, для которого $a_n = 2059 + 2^{2059}$.

Задача 2 (16 *баллов*). У клоунов Плюха и Шмяка на двоих шесть пар валенок. Каждая пара валенок выкрашена в свой особый цвет, и валенки в паре абсолютно одинаковы (не разделяются на левый и правый). Сколькими способами оба клоуна одновременно могут быть обуты в непарные валенки?

Задача 3 (16 *баллов*). Точка M принадлежит катету AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C, причем $AM = 2$, $MC = 6$. Отрезок MH – высота треугольника AMB. Точка D расположена на прямой MH так, что угол ADB равен $90°$, и точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB. Найдите длину отрезка DC, если тангенс угла ACH равен $1/7$.

Задача 4 (16 *баллов*). Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases}(a|\log_2 y| + a\,|\log_2 x| - 2)((\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 - 48a^2) = 0,\\ (\log_a x)^2(\log_a y)^2(\log_2 a^2)^4 = 256a^2\end{cases}$$

имеет ровно восемь различных решений.

Задача 5 (20 *баллов*). Внутри правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ расположена правильная четырехугольная призма $KLMNK_1L_1M_1N_1$, основание $KLMN$ которой лежит в плоскости ABC. Центр основания $KLMN$ призмы расположен на отрезке AC, $KL \parallel AC$, $KN \parallel BD$ (точки K и B лежат по одну сторону от AC), сторона основания призмы равна 2, боковое ребро KK_1 призмы равно 1. Вершины L_1 и M_1 верхнего основания призмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$ принадлежат боковым граням SBC и SCD пирамиды $SABCD$ соответственно. Плоскость γ проходит через точки B, K_1 и N_1. Найдите объемы частей, на которые делит пирамиду $SABCD$ плоскость γ, если сторона основания пирамиды равна $8\sqrt{2}$, а её высота равна 4.

Задача 6 (20 *баллов*). Все больше стран осваивают космос. Государств, которые запускают свои спутники собственными ракетоносителями – уже 12. А есть еще страны, которые пользуются услугами основных космических держав для запуска своих спутников в народнохозяйственных целях. Из-за роста числа участников космической деятельности и увеличения ее интенсивности встают вопросы обеспечения безопасности космических операций. Так, например, NASA обратилась к корпорации «Энергия» с просьбой уменьшить высоту орбиты МКС.

а) Считая Землю шаром радиуса R, определите, какое наибольшее количество спутников одновременно может находиться на орбитах вокруг Земли на одной и той же высоте H от ее поверхности так, чтобы расстояние между аппаратами было больше $\sqrt{2}(R+H)$.

б) Для найденного максимального количества спутников указать координаты возможного их расположения в системе координат с началом в центре Земли и осью абсцисс, направленной вдоль вектора, соединяющего центр Земли с одним из спутников.