

Олимпиада школьников "Шаг в будущее"

Профиль: математика

Вариант: 1

Класс: 10

Задача 1 (12 баллов). Числа u, v, w являются корнями уравнения $x^3 - 3x - 1 = 0$. Найдите $u^9 + v^9 + w^9$.

Задача 2 (16 баллов). В лаборатории имеются колбы двух размеров (объемом V и объемом $V/3$) в суммарном количестве 100 штук, причем колб каждого размера не менее 2. Лаборант поочередно случайно выбирает две колбы, и первую из них полностью заполняет 70-процентным раствором соли, а вторую полностью заполняет 40-процентным раствором соли. Затем он сливает содержимое этих двух колб в одну чашу и определяет процентное содержание соли в ней. При каком наименьшем количестве больших колб N событие «процентное содержание соли в чаше находится в пределах от 50% до 60% включительно» будет случаться реже события «при случайном бросании двух симметричных монет выпадает орел и решка (в любом порядке)»? Ответ обосновать.

Задача 3 (16 баллов). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины сторон AB и BC равны, DB – биссектриса угла ADC , $AD:DC = 4:3$. Найдите косинус угла AKB , если K – точка пересечения диагоналей AC и BD , $BK:KD = 1:3$.

Задача 4 (16 баллов). Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} (ay - ax + 2)(4y - 3|x - a| - x + 5a) = 0, \\ \sqrt{x^2 y^2} = 4a \end{cases}$$

имеет шесть различных решений.

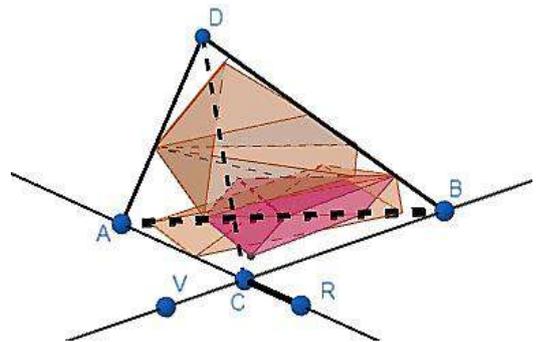
Задача 5 (20 баллов). В тетраэдре $ABCD$ суммы трёх плоских углов при каждой вершине равны 180° . Найдите объём тетраэдра, если $BC = 4$, $\cos \angle BAC = 3/4$, $\sin \angle CBD = 5\sqrt{7}/16$.

Задача 6 (20 баллов). По программе реновации было решено разобрать старый дом и на его месте построить новый. При разборе старого дома возникло две проблемы.

1) Скопление строительного лома перекрыло подход к некоторым точкам строительной площадки, между которыми необходимо было промерить расстояние. Прораб промерил расстояние от точки C до точки A и от точки C до точки B (см. рис.). Оказалось, что $AC = 4$ м, $BC = 10$ м. Кроме того, ему удалось определить расстояния $CR = 1$ м, $VR = 3$ м, $CV = 2,5$ м для точек R и V , расположенных на продолжениях прямых дорожек, соединяющих объекты A, C и C, B соответственно.

Определите расстояние между точками A и B (промерить это расстояние на площадке не представлялось возможным из-за завала) и площадь части строительной площадки $CADB$ при условии, что расстояния CD и BD вдвое больше расстояния CB .

2) Из земли торчал негнувшийся кусок арматуры - штырь, высота которого над землей 0,5 м. Попытки выдернуть его из земли не привели к успеху. Тогда рабочие сдвинули его бульдозером так, что конец штыря сравнялся с поверхностью земли и оказался на расстоянии 1,5 м от первоначальной точки входа штыря в землю. Найдите длину части штыря, скрытую в земле, предполагая, что его нижний конец не сместился.



Олимпиада школьников "Шаг в будущее"

Профиль: математика

Вариант: 3

Класс: 10

Задача 1 (12 баллов). Дробь $\frac{1}{5}$ записана в виде бесконечной двоичной дроби (в двоичной системе счисления). Сколько единиц среди первых 2022 цифр после запятой содержится в такой форме записи?

Задача 2 (16 баллов). Имеется куб, зафиксированный на ножках, и шесть различных красок. Сколькими способами можно покрасить все грани куба (каждую в один цвет, все краски использовать не обязательно) так, чтобы соседние грани (имеющие общее ребро) были разного цвета?

Задача 3 (16 баллов). Точка M принадлежит катету AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C , причем $AM = 2$, $MC = 16$. Отрезок MH – высота треугольника AMB . Точка D расположена на прямой MH так, что угол ADB равен 90° , и точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB . Найдите длину отрезка BL , если L – точка пересечения BD и AC , а тангенс угла ACH равен $1/18$.

Задача 4 (16 баллов). Найдите все значения параметра a , при которых система

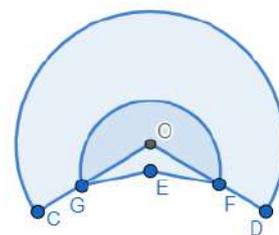
$$\begin{cases} (a|y^3| + a|x^3| - 8)(x^6 + y^6 - 3a^2) = 0, \\ \sqrt{x^6 y^6} = a \end{cases}$$

имеет ровно восемь различных решений.

Задача 5 (20 баллов). Внутри правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ расположена правильная четырехугольная призма $KLMNK_1L_1M_1N_1$, основание $KLMN$ которой лежит в плоскости ABC . Центр основания $KLMN$ призмы расположен на отрезке AC , $KL \parallel AC$, $KN \parallel BD$ (точки K и B лежат по одну сторону от AC), сторона основания призмы равна 2, боковое ребро KK_1 призмы равно 3. Вершины L_1 и M_1 верхнего основания призмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$ принадлежат боковым граням SBC и SCD пирамиды $SABCD$ соответственно. Плоскость γ проходит через прямую BD и точку L_1 . Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью γ , если сторона основания пирамиды равна $8\sqrt{2}$, а её высота равна 12.

Задача 6 (20 баллов). Для улучшения жилищных условий горожан в некоторых городах реализуется программа реновации - замена не подлежащего сохранению жилищного фонда путем его сноса и капитального строительства на высвобождаемой территории. Как правило, разбор старых домов и расчистка площадки под новое строительство происходит на ограниченной территории. Поэтому нужна техника (вращающиеся экскаваторы), которая могла бы расчистить наибольшую площадь с наименьшим количеством перемещений.

На рисунке изображена схема рабочей зоны и схема перемещений экскаватора. Встав в начальную точку E , экскаватор первым делом очищает ближнюю к себе площадку (на ней в основном находится металлический лом). Эта площадка представляет из себя сектор окружности, ограниченный большой дугой FG окружности с центром в точке E и радиусом $2\sqrt{2}$ м, а также отрезками ее радиусов EF и EG . Затем экскаватор перемещается в точку O и очищает дальнюю от себя площадку (на ней в основном находится кирпичный лом). Эта площадка с внешней стороны ограничена большой дугой CD окружности с центром в точке O и радиусом 6 м, отрезками CG и FD (точки F и G находятся на соответствующих радиусах OC и OD), а с внутренней стороны - большой дугой FG первой окружности с центром в точке E .



Определите площадь под кирпичным ломом (без металлических остатков), если точка O находится в 2 метрах от точки E по направлению к центру металлического завала, угол EOD равен 45° .