

## Вариант №1

**№1:** (15 баллов). Решите неравенство:

$$3\sqrt{(2x-3)^2} + \sqrt[6]{\sqrt{x^3-x} + \sqrt[4]{x-x^2} - x^3 + 3x - 2} \leq 9 - 6x$$

Решение:

$$3\sqrt{(2x-3)^2} + \sqrt[6]{\sqrt{x^3-x} + \sqrt[4]{x-x^2} - x^3 + 3x - 2} \leq 9 - 6x \Leftrightarrow$$

$$0 \leq 3|2x-3| + \sqrt[6]{\sqrt{x^3-x} + \sqrt[4]{x-x^2} - x^3 + 3x - 2} \leq 9 - 6x \Rightarrow (3-2x) \geq 0 \Rightarrow |2x-3| = 3-2x. \text{ Тогда это неравенство} \Leftrightarrow$$

$$9-6x + \sqrt[6]{\sqrt{x^3-x} + \sqrt[4]{x-x^2} - x^3 + 3x - 2} \leq 9 - 6x \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[6]{\sqrt{x^3-x} + \sqrt[4]{x-x^2} - x^3 + 3x - 2} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[6]{\sqrt{x^3-x} + \sqrt[4]{x-x^2} - x^3 + 3x - 2} = 0 \text{ для решения этого уравнения}$$

$$\text{должны выполняться условия: } \begin{cases} x^3 - x \geq 0 \\ x - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \cup 1 \leq x \leq +\infty \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}. \text{ Подставим эти значения в уравнение. } x=1 \text{ - решение.}$$

**Ответ: 1**

**Критерии.**

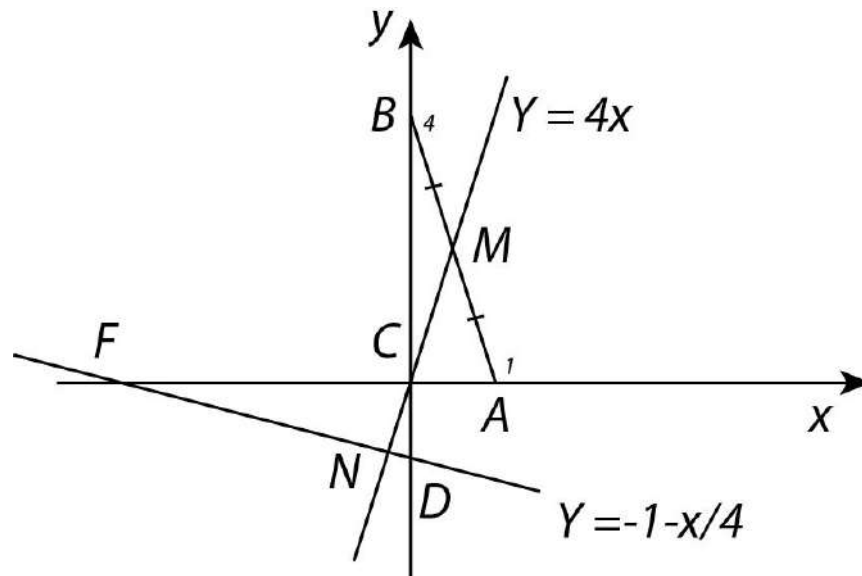
Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
4	Верно начато решение задачи (неравенство сведено к уравнению), дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

**№2:** (15 баллов). Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты ACDE и BCFG. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N. Найдите длину отрезка CN, если длины катетов равны 1 и 4.

**Решение (первый способ)**

Введем систему координат с началом в точке C, осью абсцисс CA и осью ординат CB. Тогда A(1,0), B(0,4), D(0,-1), F(-4,0), и точка N(x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>) - лежит на пересечении прямых (CM) и (FD). Из ΔACM следует, что tg∠MCA =

4  $\Rightarrow$  уравнение прямой (CM) есть  $y = 4x$ . Пусть уравнение прямой (FD):  $y = kx + b$ . Из  $\triangle FCD$  следует, что  $k = -\frac{1}{4}$ ,  $b = -1$  и (FD):  $y = -\frac{1}{4}x - 1$ .

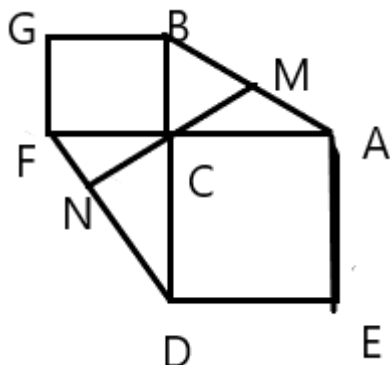


Координаты точки N должны удовлетворять следующей системе:

$$\begin{cases} y_0 = 4x_0 \\ y_0 = -1 - \frac{x_0}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{4}{17} \\ y_0 = -\frac{16}{17} \end{cases} \Rightarrow CN = \sqrt{x_0^2 + (4x_0)^2} = \sqrt{17}|x_0| \\ = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

Ответ:  $\frac{4}{\sqrt{17}}$

**Решение (второй способ)**



$\triangle DCF = \triangle ACB$  (по двум сторонам и углу между ними). Пусть  $\angle BAC = \beta$ . Тогда  $\angle FDC = \beta$ . По свойству медианы прямоугольного треугольника,  $CM=AM=BM \Rightarrow$  треугольник  $AMC$  – равнобедренный  $\Rightarrow \angle MAC = \angle MCA$ .  $\angle FCN = \angle MCA$  (как вертикальные)  $\Rightarrow \angle FCN = \angle MAC = \angle BAC = \beta$ . Т.к.  $\angle FCD = 90^\circ$ , то  $\angle NCD = 90^\circ - \beta$ . Тогда по теореме о сумме углов треугольника ( $NCD$ )  $\angle CND = 90^\circ$ , т.е.  $CN$  – высота прямоугольного треугольника  $FCD \Rightarrow CN = \frac{FC \cdot CD}{DF} = \frac{1 \cdot 4}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$ .

Ответ:  $\frac{4}{\sqrt{17}}$ .

### Критерии:

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ.
12	При правильном ответе есть замечания к четкости его изложения и обоснования или решение содержит арифметическую ошибку.
6	Верно построен рисунок и найдены координаты одной из точек (при аналитическом решении) или доказано, что продолжение медианы $CM$ перпендикулярно прямой $DF$ ( $CN$ – высота треугольника $DCF$ ).
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

**№3:** (15 баллов). Школьник Иванов проплывает на плоту путь между городами  $A$  и  $B$  за 15 часов. На моторной лодке вместе с папой он проплывает весь путь от  $A$  до  $B$  и обратно не менее чем за 8 часов. Точно такое же путешествие, но вместе с дедушкой (от  $A$  до  $B$  и обратно) занимает по времени не более 20 часов, при этом собственная скорость лодки при управлении дедушкой на 50% меньше, чем у папы. Сколько часов школьник вместе с дедушкой плывут на моторной лодке от города  $A$  до города  $B$ ?

### Решение:

Пусть  $S$  – расстояние между городами  $A$  и  $B$ ,  $v$  – скорость течения реки и плота,  $u$  – собственная скорость лодки при управлении папой. Тогда собственная скорость лодки при управлении дедушкой равна  $0,5u$ . Согласно условию задачи получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{S}{v} = 15 \\ \frac{S}{u+v} + \frac{S}{u-v} \geq 8 \\ \frac{S}{0,5u+v} + \frac{S}{0,5u-v} \leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{S}{v} = 15 \\ \frac{15v}{u+v} + \frac{15v}{u-v} \geq 8 \\ \frac{15v}{0,5u+v} + \frac{15v}{0,5u-v} \leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{S}{v} = 15 \\ \frac{15}{\frac{u}{v}+1} + \frac{15}{\frac{u}{v}-1} \geq 8 \\ \frac{15}{0,5\frac{u}{v}+1} + \frac{15}{0,5\frac{u}{v}-1} \leq 20 \end{cases}$$

Сделаем замену  $\frac{u}{v} = x$  и решим систему неравенств относительно  $x$ , в

процессе решения учтём, что  $x = \frac{u}{v} > 1$ :

$$\begin{cases} \frac{15}{x+1} + \frac{15}{x-1} \geq 8 \\ \frac{15}{0,5x+1} + \frac{15}{0,5x-1} \leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30x \geq 8(x^2 - 1) \\ 30 \cdot \frac{1}{2}x \leq 20 \cdot \left( \left( \frac{1}{2}x \right)^2 - 1 \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 15x - 4 \leq 0 \\ x^2 - 3x - 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 4, \text{ следовательно } \frac{u}{v} = 4.$$

Школьник вместе с дедушкой плывут на моторной лодке от города  $A$  до

города  $B$  за время  $\frac{S}{0,5u+v} = \frac{S}{0,5 \cdot 4v+v} = \frac{S}{3v} = \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{v} = \frac{1}{3} \cdot 15 = 5$

**Ответ: 5.**

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
12	При обоснованном решении ответ отличается от правильного из-за арифметической ошибки или при правильном ответе имеются недостатки обоснования
5	Верно составлена модель задачи и имеются некоторые продвижения в решении
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

**№4:** (15 баллов). При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$\left| \frac{x^2 - 2ax + a^2 + 1}{x - a} \right| + x^2 - 6x + 7 = 0 \text{ имеет хотя бы одно решение?}$$

**Решение:**

Преобразуем выражение под знаком модуля:

$$\left| \frac{(x - a)^2 + 1}{x - a} \right| + x^2 - 6x + 7 = 0,$$

$$\left| x - a + \frac{1}{x - a} \right| + x^2 - 6x + 7 = 0,$$

$$\left| x - a + \frac{1}{x - a} \right| = -x^2 + 6x - 7.$$

По неравенству Коши сумма двух взаимно обратных положительных чисел всегда больше или равна 2, а отрицательных – меньше или равна  $-2$ ,

следовательно левая часть равенства  $\left| x - a + \frac{1}{x - a} \right| \geq 2$ , чтобы равенство было

верным необходимо, чтобы и правая часть уравнения была больше или равна 2.

$$-x^2 + 6x - 7 \geq 2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Равенство возможно только при  $x = 3$ , подставим это значение в исходное уравнение.

$$\left| \frac{a^2 - 6a + 10}{3 - a} \right| - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2 - 6a + 10}{3 - a} = 2 \\ \frac{a^2 - 6a + 10}{3 - a} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 6a + 10 = 6 - 2a \\ a^2 - 6a + 10 = 2a - 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4a + 4 = 0 \\ a^2 - 8a + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 4 \end{cases}.$$

**Ответ:**  $a = 2$  или  $a = 4$ .

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
12	При обоснованном решении ответ отличается от правильного из-за арифметической ошибки или при правильном ответе имеются недостатки обоснования
5	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

**№5:** (20 баллов). Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается стороны  $AB$  в точке  $M$ , а стороны  $AC$  – в точке  $K$ . На стороне  $AB$  выбирается точка  $N$  так, что отрезок  $MK$  делит отрезок  $CN$  пополам. Найдите длину отрезка  $AN$ , если  $AB = 8, AC = 7, BC = 6$ .

**Решение (первый способ)**

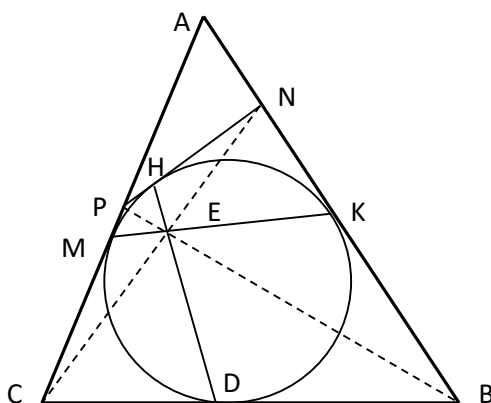
Проведем касательную к данной окружности через точку  $N$ . Она пересечет  $AC$  в точке  $P$ . Четырехугольник  $BNPC$  – описанный около данной окружности.

По свойству описанного четырехугольника: отрезки  $MK, CN, BP$  и  $HD$  пересекаются в одной точке  $E$  (Теорема Бриансона), следовательно, диагональ  $BP$  четырехугольника  $BNPC$  делит его вторую диагональ пополам.

Пусть  $\angle BEC = \alpha$ , тогда  $\angle NEP = \alpha, \angle BEN = \angle CEP = 180^\circ - \alpha$ . Так как  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ , то по Теореме косинусов:

$$BC^2 = CE^2 + BE^2 - 2CE \cdot BE \cdot \cos\alpha, PC^2 = CE^2 + PE^2 + 2CE \cdot PE \cdot \cos\alpha,$$

$$BN^2 = NE^2 + BE^2 + 2NE \cdot BE \cdot \cos\alpha, PN^2 = NE^2 + PE^2 - 2NE \cdot PE \cdot \cos\alpha.$$



По свойству описанного четырехугольника:  $BC + PN = BN + PC$  и  $CE = NE \Rightarrow$

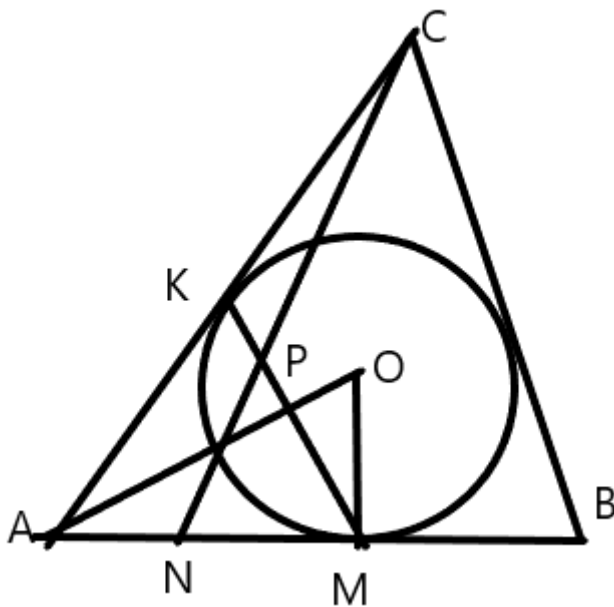
$$\sqrt{CE^2 + BE^2 - 2CE \cdot BE \cdot \cos\alpha} + \sqrt{CE^2 + PE^2 - 2CE \cdot PE \cdot \cos\alpha} = \\ \sqrt{CE^2 + BE^2 + 2CE \cdot BE \cdot \cos\alpha} + \sqrt{CE^2 + PE^2 + 2CE \cdot PE \cdot \cos\alpha}.$$

Очевидно, что равенство возможно только при  $\cos\alpha = 0$ . Действительно, если  $\cos\alpha > 0$ , то левая его часть меньше правой и наоборот при  $\cos\alpha < 0$ . Следовательно,  $BP \perp CN$ , т. е.  $BP$  – серединный перпендикуляр к отрезку  $CN$ . Итак треугольник  $BCN$  – равнобедренный.

$$BC = BN \Rightarrow AN = AB - BN = AB - BC = 8 - 6 = 2.$$

**Ответ: 2.**

**Решение (второй способ)**



По теореме Менелая ( $\triangle ACN$ , секущая  $KM$ )  $\frac{AK}{KC} \cdot \frac{CP}{PN} \cdot \frac{NM}{MA} = 1$ . Пусть  $AK = x$ .

Тогда  $AM = x$  (как две касательные из одной точки). Т.к. по условию  $\frac{CP}{PN} = 1$ ,

то  $\frac{x}{KC} = \frac{x}{NM}$ ,  $\Rightarrow NM = KC$ . Следовательно, достаточно найти  $x$ .

$$P_{ABC} = 8 + 7 + 6 = 21 \Rightarrow p = \frac{21}{2}.$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p \cdot (p - AB) \cdot (p - AC) \cdot (p - BC)} = \sqrt{\frac{21}{2} \cdot \left(\frac{21}{2} - 8\right) \cdot \left(\frac{21}{2} - 7\right) \cdot \left(\frac{21}{2} - 6\right)} = \frac{21}{4} \sqrt{15}.$$

$$S_{ABC} = p \cdot r \Rightarrow \frac{21\sqrt{15}}{4} = \frac{21}{2} \cdot r \Rightarrow r = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

По теореме косинусов:  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle A \Rightarrow$   
 $36 = 49 + 64 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos \angle A \Rightarrow 2 \cdot 56 \cdot \cos \angle A = 77 \Rightarrow \cos \angle A = \frac{11}{16}.$

$$\cos \angle A = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}} \Rightarrow \frac{11}{16} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}} \Rightarrow 27 \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = 5 \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{5}{3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{9}.$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{15}}{9} = \frac{\sqrt{15}}{2 \cdot x} \Rightarrow x = \frac{9}{2} = 4,5 \Rightarrow AM = AK = x = 4,5 \Rightarrow$$
  
 $\Rightarrow KC = AC - AK = 7 - x = 7 - 4,5 = 2,5 = NM. \quad AN = AM - NM = 4,5 - 2,5 = 2$

**Ответ: 2**

### Критерии.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	При верном и обоснованном ходе решения разобраны не все варианты или решение недостаточно обосновано.
5	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты (обосновано и правильно расставлены точки М, N и К), дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

**№6:** (20 баллов). Первый рабочий красит стандартный номер в гостинице за 1 день, а выкладывает плиткой ванную комнату за 5 дней. Второй рабочий красит стандартный номер в гостинице за 2 дня, а выкладывает плиткой ванную комнату за 8 дней. За какое минимальное количество дней они отремонтируют 30 стандартных номеров и 20 ванных комнат, если они начинают и заканчивают работать вдвоем одновременно.

**Ответ: 80.**

### Решение.

Пусть  $x_1$  дней первый красит, а  $x_2$  дней кладет плитку. Аналогично, пусть  $y_1$  дней второй красит, а  $y_2$  дней кладет плитку. Тогда,  $t = x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \rightarrow \min (*)$  и



$$\begin{cases} \frac{x_1}{1} + \frac{y_1}{2} = 30, \\ \frac{x_2}{5} + \frac{y_2}{8} = 20. \end{cases}$$

Решив систему с учетом (\*), получим:

$$x_1 = 550 - 6,5t; \quad x_2 = 7,5t - 550; \quad y_1 = 13t - 1040; \quad y_2 = 1040 - 12t.$$

По условию задачи  $x_1 \geq 0$  и  $x_2 \geq 0 \Rightarrow 80 \leq t \leq 86\frac{2}{3}$ , аналогично  $y_1 \geq 0$  и  $y_2 \geq 0 \Rightarrow$

$$73\frac{1}{3} \leq t \leq 84\frac{8}{13} \Rightarrow 80 \leq t \leq 84\frac{8}{13}.$$

Действительно, при  $t = 80$  получаем решение:  $x_1 = 30$ ;  $x_2 = 50$ ;  $y_1 = 0$ ;  $y_2 = 80$ .

**Ответ: 80.**

**Критерии.**

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
18	При верном и обоснованном ходе решения допущены арифметические ошибки или решение недостаточно обосновано.
12	При верном и обоснованном ходе решения найдены не все варианты.
6	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

**Математика****9-й класс****Вариант №3****№1:** (15 баллов). Решите неравенство:

$$2\sqrt{(4x-9)^2} + \sqrt[4]{\sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5x^2+10x+14}} + x^2 + 2x - 4 \leq 18-8x$$

**Решение.**

$$2\sqrt{(4x-9)^2} + \sqrt[4]{\sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5x^2+10x+14}} + x^2 + 2x - 4 \leq 18-8x \Leftrightarrow$$

$2|4x-9| + \sqrt[4]{\sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5x^2+10x+14}} + x^2 + 2x - 4 \leq 2 \cdot (9-4x)$ . Оба слагаемых в левой части неотрицательны, следовательно,  $(9-4x) \geq 0 \Rightarrow$

$4x-9 \leq 0$ , а значит  $|4x-9| = 9-4x$ . Следовательно, исходное неравенство  $\Leftrightarrow$

$$\text{уравнению } \sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5x^2+10x+14} - 4 + 2x + x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3(x+1)^2+4} + \sqrt{5(x+1)^2+9} = 5 - (x+1)^2$$

Так как

$$\sqrt{3(x+1)^2+4} + \sqrt{5(x+1)^2+9} \geq 5 \text{ и } 5 - (x+1)^2 \leq 5 \Rightarrow \text{рассматриваемое}$$

$$\text{уравнение } \Leftrightarrow \text{системе } \begin{cases} \sqrt{3(x+1)^2+4} + \sqrt{5(x+1)^2+9} = 5 \\ 5 - (x+1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$$

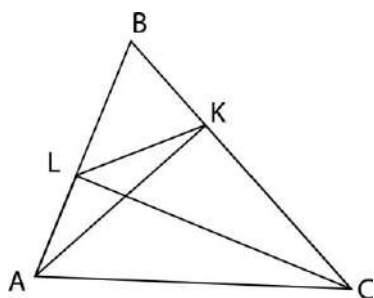
Ответ: -1

**Критерии.**

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
4	Верно начато решение задачи (неравенство сведено к уравнению), дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

**№2:** (15 баллов). В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты АК и СL. Известно, что  $LK=12$  и  $\angle ABC = 60^\circ$ . Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

**Решение.**



$$\angle ALC = \angle AKC = 90^\circ \Rightarrow \triangle AKB \text{ подобен } \triangle CLB$$

$$\Rightarrow \frac{BL}{BK} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow \frac{BL}{BC} = \frac{BK}{BA} \Rightarrow \triangle ABC \text{ подобен } \triangle BKL$$

$$\Rightarrow \frac{BL}{BC} = \frac{BK}{BA} = \cos \angle ABC = \frac{1}{2} = \frac{LK}{AC} \Rightarrow AC = 2LK = 24.$$

Радиус окружности, описанной около  $\triangle ABC$  равен  $R = \frac{AC}{2 \sin 60^\circ} = \frac{24}{\sqrt{3}}$

**Ответ:**  $\frac{24}{\sqrt{3}}$

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ.
12	При правильном ответе есть замечания к четкости его изложения и обоснования или решение содержит арифметическую ошибку
6	Обоснованно доказано подобие треугольников KBL и ABC, дальнейших существенных продвижений нет.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

**№3:** (15 баллов). Мешок Деда Мороза вмещает ровно 160 подарков для мальчиков или ровно 120 подарков для девочек. Подарки состоят из конфет. Если мешок заполнить таким образом, что суммарное число конфет в подарках для мальчиков было равно общему числу конфет в подарках для девочек, то всего в мешке будет 140 подарков и в них 4320 конфет. На сколько больше конфет было в подарке для девочек, чем в подарке для мальчиков?

**Решение:** Если мешок Деда Мороза вмещает ровно 160 подарков для мальчиков, то один подарок для мальчиков занимает  $\frac{1}{160}$  часть мешка, и,

аналогично, подарок для девочек занимает  $\frac{1}{120}$  часть мешка.

Пусть всего в мешке оказалось  $n$  подарков для мальчиков и  $m$  подарков для девочек, в подарке для мальчиков  $a$  конфет, а в подарке для девочек  $b$  конфет. Тогда

$$\begin{cases} \frac{n}{160} + \frac{m}{120} = 1 \\ n + m = 140 \\ an = bm = 2160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 80 \\ m = 60 \\ a \cdot 80 = b \cdot 60 = 2160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 80 \\ m = 60 \\ a = 27 \\ b = 36 \end{cases}$$

$$b - a = 36 - 27 = 9$$

**Ответ:** 9.

**Критерии.**

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
12	При обоснованном решении ответ отличается от правильного из-за арифметической ошибки или при правильном ответе имеются недостатки обоснования
5	Верно составлена модель задачи и имеются некоторые продвижения в решении
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

**№4:** (15 баллов). Найти все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $(a + x^2 - x + 2)^2 = 4a(ax^2 + x^2 - x + 2)$  имеет единственное решение.

**Решение:** Введём замену  $t = x^2 - x + 2$ , тогда уравнение примет вид

$$(a + t)^2 = 4a(ax^2 + t)$$

$$(a - t)^2 - (2ax)^2 = 0$$

$$(t - a - 2ax)(t - a + 2ax) = 0$$

$$(x^2 - x + 2 - a - 2ax)(x^2 - x + 2 - a + 2ax) = 0$$

Уравнение распадается на два квадратных уравнения  $x^2 - x + 2 - a - 2ax = 0$  и  $x^2 - x + 2 - a + 2ax = 0$ , и имеет одно решение, если дискриминант одного из уравнений равен нулю, а второго отрицательный или наоборот.

$$D_1 = (1 + 2a)^2 - 4(2 - a) = 4a^2 + 8a - 7$$

$$D_2 = (1 - 2a)^2 - 4(2 - a) = 4a^2 - 7.$$

Уравнение имеет единственное решение при  $a = \frac{\sqrt{11}}{2} - 1$  или  $a = -\frac{\sqrt{7}}{2}$

Ответ:  $\frac{\sqrt{11}}{2} - 1, -\frac{\sqrt{7}}{2}$ .

**Критерии.**

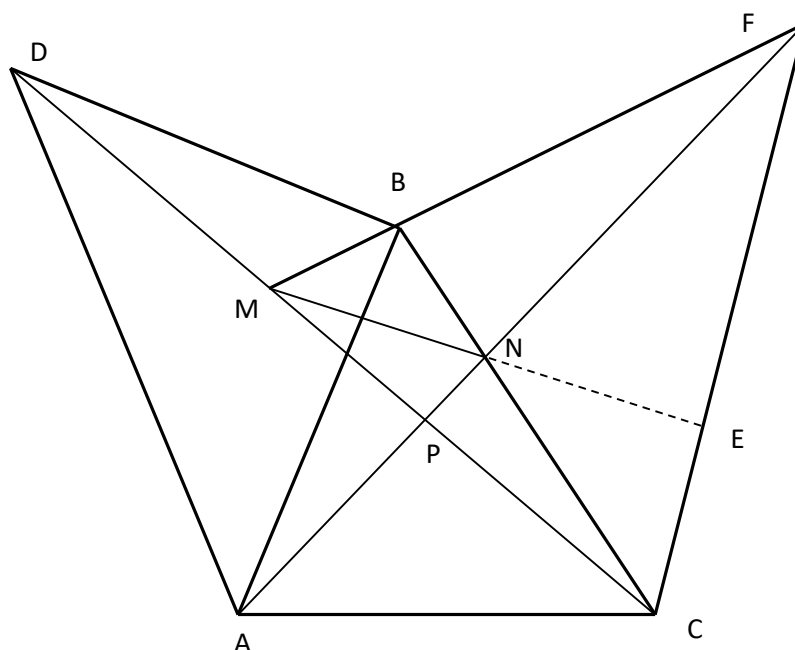
Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
12	При обоснованном решении ответ отличается от правильного из-за арифметической ошибки или при правильном ответе имеются недостатки обоснования
5	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

**№5:** (20 баллов). На боковых сторонах  $AB$  и  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$ , наружу построены равнобедренные прямоугольные треугольники  $ABD$  и  $BCF$  с катетами равными соответствующим сторонам  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$ . Прямые  $FB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $M$ , а  $FA$  и  $BC$  – в точке  $N$ . Найдите градусную меру  $\angle BMN$ .

Ответ:  $45^\circ$ .

**Решение.**

Треугольники  $ABF$  и  $DBC$  равны по двум сторонам  $AB = BD, CB = BF$  и углу между ними  $\angle ABF = \angle CBD = \angle CBA + 90^\circ \Rightarrow \angle BAF = \angle BDC$  и  $\angle BFA = \angle BCD$ .



Сумма углов треугольника  $ABC$ :  $\angle ABC + \angle BCP + \angle BAP + \angle PAC + \angle PCA = 180^\circ$ , но т.к.  $\angle BAP = \angle BAF = \angle BDC$ , то  $\angle ABC + \angle BCP + \angle BAP = \angle ABC + \angle BCP + \angle BDC$ . По теореме о сумме углов треугольника  $BCD$ ,  $\angle ABC + \angle BCP + \angle BDC + \angle DBA = \angle ABC + \angle BCP + \angle BDC + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \angle ABC + \angle PAC + \angle PCA = 90^\circ \Rightarrow \angle CPA = 90^\circ \Rightarrow \angle CPF = 90^\circ$ .

Рассмотрим треугольник  $MCF$ . В нем  $CB$  и  $FP$  – высоты, а  $N$  – их точка пересечения. Продолжим  $MN$  до пересечения с  $FC$  в точке  $E$ , следовательно,  $ME$  – его третья высота, т.е.  $ME \perp CF$ . Т.к. треугольник  $CBF$  – прямоугольный и равнобедренный, то  $\angle BFC = \angle MFE = 45^\circ$ , поэтому  $\angle BMN = \angle FME = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ .

**Ответ:**  $45^\circ$ .

### Критерии.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	При верном и обоснованном ходе решения разобраны не все варианты или решение недостаточно обосновано.
5	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты (обосновано и правильно расставлены точки $M$ , $N$ и $K$ ), дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

**№6:** (20 баллов). В квадрате  $6 \times 6$  расставили цифры так, что в верхней строке и левом столбце нет нулей. Всего получилось 12 шестизначных чисел: 6 из горизонтальных строк квадрата (слева-направо) и 6 из вертикальных столбцов квадрата (сверху-вниз). Коля, Вадим и Костя запомнили их, но оказалось, что каждый пропустил одно из 12 чисел. Коля заметил, что каждое из его одиннадцати чисел, делится на 11, Вадим обнаружил, что все его одиннадцать чисел делятся на 7, а Костя нашел у своих одиннадцати чисел общий делитель 13. Исходный квадрат они потеряли, а числа забыли, но им показалось, что где-то среди 12 чисел была комбинация цифр подряд 2021. Могло ли такое быть? Ответ обоснуйте.

**Ответ:** нет.

### Решение.

Докажем, что все 12 шестизначных числа делятся на 7, 11 и 13, т.е. на 1001. Следовательно, у каждого шестизначного числа  $(abcabc)$  цифры через две совпадают, а у 2021 – нет.

Доказательство. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_6$  – горизонтальные числа в квадрате, а  $y_1, y_2, \dots, y_6$  – вертикальные. Тогда  $100000x_1 + 10000x_2 + 1000x_3 + 100x_4 + 10x_5 + x_6$  и  $100000y_1 + 10000y_2 + 1000y_3 + 100y_4 + 10y_5 + y_6$ , т.е. 11 из 12 слагаемых делятся на 7, 11 и 13, следовательно, и 12-е тоже.

Докажем это равенство: пусть

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_{11} \cdot 10^5 + a_{12} \cdot 10^4 + a_{13} \cdot 10^3 + a_{14} \cdot 10^2 + a_{15} \cdot 10^1 + a_{16} \cdot 10^0, \\
x_2 &= a_{21} \cdot 10^5 + a_{22} \cdot 10^4 + a_{23} \cdot 10^3 + a_{24} \cdot 10^2 + a_{25} \cdot 10^1 + a_{26} \cdot 10^0, \\
x_3 &= a_{31} \cdot 10^5 + a_{32} \cdot 10^4 + a_{33} \cdot 10^3 + a_{34} \cdot 10^2 + a_{35} \cdot 10^1 + a_{36} \cdot 10^0, \\
x_4 &= a_{41} \cdot 10^5 + a_{42} \cdot 10^4 + a_{43} \cdot 10^3 + a_{44} \cdot 10^2 + a_{45} \cdot 10^1 + a_{46} \cdot 10^0, \\
x_5 &= a_{51} \cdot 10^5 + a_{52} \cdot 10^4 + a_{53} \cdot 10^3 + a_{54} \cdot 10^2 + a_{55} \cdot 10^1 + a_{56} \cdot 10^0, \\
x_6 &= a_{61} \cdot 10^5 + a_{62} \cdot 10^4 + a_{63} \cdot 10^3 + a_{64} \cdot 10^2 + a_{65} \cdot 10^1 + a_{66} \cdot 10^0,
\end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned}
100000x_1 + 10000x_2 + 1000x_3 + 100x_4 + 10x_5 + x_6 &= a_{11} \cdot 10^{10} + a_{12} \cdot 10^9 + a_{13} \cdot 10^8 + \\
&+ a_{14} \cdot 10^7 + a_{15} \cdot 10^6 + a_{16} \cdot 10^5 + a_{21} \cdot 10^9 + a_{22} \cdot 10^8 + a_{23} \cdot 10^7 + a_{24} \cdot 10^6 + a_{25} \cdot \\
&+ 10^5 + a_{26} \cdot 10^4 + a_{31} \cdot 10^8 + a_{32} \cdot 10^7 + a_{33} \cdot 10^6 + a_{34} \cdot 10^5 + a_{35} \cdot 10^4 + a_{36} \cdot 10^3 + \\
&+ a_{41} \cdot 10^7 + a_{42} \cdot 10^6 + a_{43} \cdot 10^5 + a_{44} \cdot 10^4 + a_{45} \cdot 10^3 + a_{46} \cdot 10^2 + a_{51} \cdot 10^6 + a_{52} \cdot \\
&+ 10^5 + a_{53} \cdot 10^4 + a_{54} \cdot 10^3 + a_{55} \cdot 10^2 + a_{56} \cdot 10^1 + a_{61} \cdot 10^5 + a_{62} \cdot 10^4 + a_{63} \cdot 10^3 + \\
&+ a_{64} \cdot 10^2 + a_{65} \cdot 10^1 + a_{66} \cdot 10^0.
\end{aligned}$$

Но ведь

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_{11} \cdot 10^5 + a_{21} \cdot 10^4 + a_{31} \cdot 10^3 + a_{41} \cdot 10^2 + a_{51} \cdot 10^1 + a_{61} \cdot 10^0, \\
y_2 &= a_{12} \cdot 10^5 + a_{22} \cdot 10^4 + a_{32} \cdot 10^3 + a_{42} \cdot 10^2 + a_{52} \cdot 10^1 + a_{62} \cdot 10^0, \\
y_3 &= a_{13} \cdot 10^5 + a_{23} \cdot 10^4 + a_{33} \cdot 10^3 + a_{43} \cdot 10^2 + a_{53} \cdot 10^1 + a_{63} \cdot 10^0, \\
y_4 &= a_{14} \cdot 10^5 + a_{24} \cdot 10^4 + a_{34} \cdot 10^3 + a_{44} \cdot 10^2 + a_{54} \cdot 10^1 + a_{64} \cdot 10^0, \\
y_5 &= a_{15} \cdot 10^5 + a_{25} \cdot 10^4 + a_{35} \cdot 10^3 + a_{45} \cdot 10^2 + a_{55} \cdot 10^1 + a_{65} \cdot 10^0, \\
y_6 &= a_{16} \cdot 10^5 + a_{26} \cdot 10^4 + a_{36} \cdot 10^3 + a_{46} \cdot 10^2 + a_{56} \cdot 10^1 + a_{66} \cdot 10^0,
\end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned}
100000y_1 + 10000y_2 + 1000y_3 + 100y_4 + 10y_5 + y_6 &= a_{11} \cdot 10^{10} + a_{21} \cdot 10^9 + a_{31} \cdot 10^8 + \\
&+ a_{41} \cdot 10^7 + a_{51} \cdot 10^6 + a_{61} \cdot 10^5 + a_{12} \cdot 10^9 + a_{22} \cdot 10^8 + a_{32} \cdot 10^7 + a_{42} \cdot 10^6 + a_{52} \cdot \\
&+ 10^5 + a_{62} \cdot 10^4 + a_{13} \cdot 10^8 + a_{23} \cdot 10^7 + a_{33} \cdot 10^6 + a_{43} \cdot 10^5 + a_{53} \cdot 10^4 + a_{63} \cdot 10^3 + \\
&+ a_{14} \cdot 10^7 + a_{24} \cdot 10^6 + a_{34} \cdot 10^5 + a_{44} \cdot 10^4 + a_{54} \cdot 10^3 + a_{64} \cdot 10^2 + a_{15} \cdot 10^6 + a_{25} \cdot \\
&+ 10^5 + a_{35} \cdot 10^4 + a_{45} \cdot 10^3 + a_{55} \cdot 10^2 + a_{65} \cdot 10^1 + a_{16} \cdot 10^5 + a_{26} \cdot 10^4 + a_{36} \cdot 10^3 + \\
&+ a_{46} \cdot 10^2 + a_{56} \cdot 10^1 + a_{66} \cdot 10^0 = 100000x_1 + 10000x_2 + 1000x_3 + 100x_4 + 10x_5 + x_6.
\end{aligned}$$

Ч.т.д.

### Критерии.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При верном и обоснованном ходе решения не обосновано, что 12-е число сохраняет свойства других 11-ти.
6	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты ( $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$ и $abc \cdot 1001 = abcabc$ ), дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.