Олимпиада школьников "Шаг в будущее"

Профиль: математика.

Вариант: 3 Класс: 8

Задача 1 (*15 баллов*). Найдите все значения параметра *a*, при которых выполнено $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=2$, где x_1, x_2 – корни уравнения $2x^2-(a+2)x-2a-4=0$.

Решение.

Преобразуем $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=2$ с учетом $x_1+x_2=\frac{a+2}{2}$ и $x_1x_2=-(a+2)$, получим $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}=\frac{(a+2)^2+2(a+2)}{(a+2)^2}=2$, откуда $a=-\frac{6}{7}$. Найдем дискриминант $D=(a+2)^2+16(a+2)=(a+2)(a+18)$, при $a=-\frac{6}{7}$ он положителен, при $a=-2$ корни равны нулю.

Ответ: $a=-\frac{6}{7}$.

15 баллов	Полное обоснованное решение
12 баллов	Допущена арифметическая ошибка при верном ходе рассуждений или недостаточно обоснованное решение.
10 баллов	Получено верное значение параметра, но не проверено наличие корней и/или $a=-2$ входит в ответ.
5 баллов	Верно преобразовано выражение или другое верное начало решения
0 баллов	Решение не верно или отсутствует

Задача 2 (*15 баллов*). Найдите все значения x и y, при которых выполнены оба уравнения

$$x\sqrt{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}+9+4\sqrt{3}}-2y=y\sqrt{\left(1-\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2};xy=6+2x-3y$$

Решение.

$$xy=6+2x-3y;\quad y\left(x+3\right)-2\left(x+3\right)=0;y=2;x=-3$$

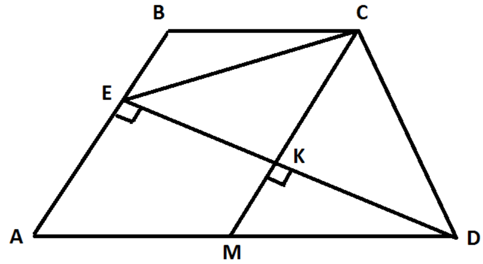
$x\sqrt{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}+9+4\sqrt{3}}=y\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}+1\right);\ x=y;$ Получаем пары (-3;-3);(2;2).

Ответ: (-3;-3);(2;2).

15 баллов	Полное обоснованное решение
10 баллов	Решены оба уравнения, но не упрощено выражение под корнем
5 баллов	Решено одно из уравнений
0 баллов	Решение не верно или отсутствует

Задача 3 (*15 баллов*). В трапеции *ABCD* $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$. Точка *E* принадлежит *AB* так, что $AB \perp DE$. Найти площадь $\triangle ECD$, если *ED=6, CD=5*.

Решение.



Пусть точка M середина AD, тогда

$AM = BC \Rightarrow ABCM$ параллелограмм.

Пусть

$DE \cap CM = K \Rightarrow \angle AED = \angle MKD = 90^0$

KM средняя линия $\triangle AED \Rightarrow EK = KD$.

В треугольнике ECD CK - высота и медиана $\Rightarrow CK = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

$$S_{\triangle ECD} = \frac{ED \cdot CK}{2} = 12$$

Ответ: 12.

15 баллов	Решение верно.
10 баллов	Решение верно, но недостаточно обоснованно или допущена одна вычислительная ошибка.
5 баллов	Доказано одно из промежуточных утверждений.
0 баллов	Решение не верно или отсутствует

Задача 4 (*15 баллов*). При каких значениях параметра a уравнение $f(x) = a$ имеет единственное решение, если известно, что

$f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$, если $x \in [0;5]$;

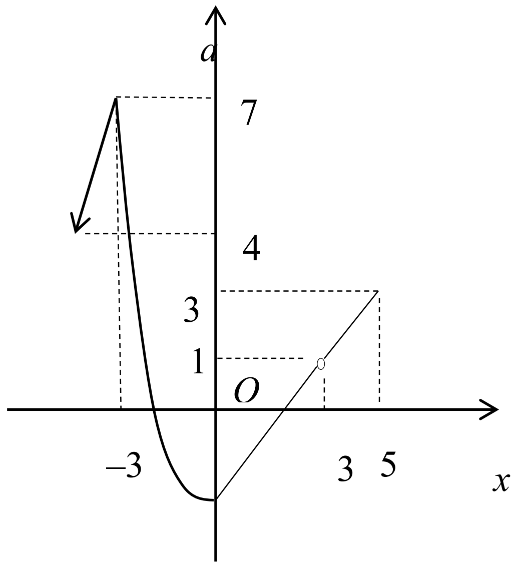
$f(x) = x^2 - 2$, если $x \in (-3;0)$;

$f(x) = 3x + 16$, если $x \in (-4;-3]$?

Решение.

$f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \dfrac{(x-2)(x-3)}{x-3} = x - 2$, если $x \in [0;3) \cup (3;5]$, точка (3;1) не принадлежит графику.

Если $x \in (-3;0)$ графиком является часть параболы с вершиной (0;–2), если $x \in (-4;-3]$, то графиком будет отрезок без левого конца – точки (–4;4).



Ответ: $a \in \{1; -2 : 7\} \cup (3; 4]$

15 баллов	Полное, обоснованное решение
12 баллов	Ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка.
10 баллов	Потеряно a=1 и/или a=4.
5 баллов	Верно преобразовано выражение или другое верное начало решения
0 баллов	Решение не верно или отсутствует

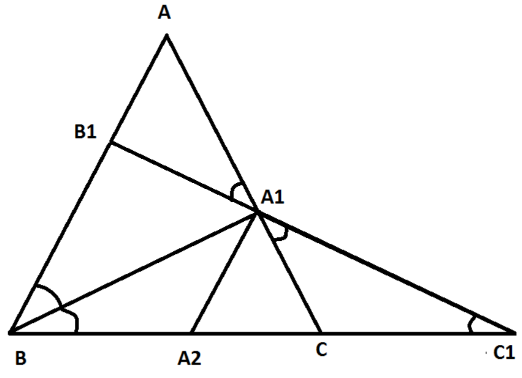
Задача 5 (*20 баллов*). В равнобедренном $\triangle ABC$ с основанием ВС проведена прямая, пересекающая сторону АВ в точке B_1, сторону ВС в точке A_1, а продолжение стороны АС за точку С в точке C_1 так, что $\triangle BA_1C_1$ равнобедренный с основанием BC_1.

$$\angle A_1BC_1 = \frac{1}{2}\angle ABC, \ 3AB = 2BC,$$

$C_1A_1 \cap AB = B_1$. Найти отношение площади $\triangle AB_1A_1$ к площади $\triangle CA_1C_1$.

Решение.

Пусть в $\triangle ABC$ половина угла В равна $= \alpha$,
тогда $\angle ACB = \angle ABC = 2\alpha$,
$\angle C_1A_1C = \angle A_1CB - \angle A_1C_1C = 2\alpha - \alpha = \alpha$.
Пусть $AB = 10x$, тогда $BC = 15x$, в
$AA_1 = 4x$, $A_1C = CC_1 = 6x$
Проведем $A_1A_2 \parallel AB$, тогда (по теореме Фалеса) $BA_2 = 6x$,
$A_2C = 9x \Rightarrow B_1A_1 : A_1C_1 = BA_2 : A_2C_1 = 6 : 15$



$\triangle AB_1A_1$ и $\triangle A_1C_1C$ имеют одинаковый угол $\Rightarrow \dfrac{S_{\triangle A_1B_1A}}{S_{\triangle A_1C_1C}} = \dfrac{AA_1 \cdot A_1B_1}{A_1C \cdot A_1C_1} = \dfrac{4}{6} \cdot \dfrac{6}{15} = \dfrac{4}{15}$

Ответ: $\dfrac{4}{15}$.

20 баллов	Решение верно.
15 баллов	Решение верно, но недостаточно обоснованно или допущена одна вычислительная ошибка.
10 баллов	Доказано, что $\triangle A_1C_1C$ равнобедренный и найдено отношение отрезков B_1A_1 к A_1C_1
5 баллов	Найдено одно из промежуточных утверждений.
0 баллов	Решение не верно или отсутствует.

Задача 6 (*20 баллов*). Тренер детской команды сноубордистов взял на соревнование два вида твердых парафинов для обеспечения хорошего сцепления и легкого скольжения. Это бруски одинаковой длины, но разной контактной площади. По опыту прошлых соревнований тренер знает, что бруска с большей контактной площадью хватает на три часа беспрерывной работы. На этот раз тренер решил взять помощника. Они вместе начали работать разными брусками-парафинами и к концу соревнования от большего бруска остался вдвое больший кусок, чем от меньшего. На сколько часов рассчитан брусок меньшей контактной площади, если соревнование длилось 2 часа?

Решение.

Пусть длина брусков L .Скорость использования-истирания бруска с большим сечением x , второго- y; t –искомое время.

$$L = 3x = ty; (L-2x) = 2(L-2y); L = 4y - 2x = 4y - 2\cdot\frac{L}{3}; \frac{5}{3}L = 4y \Rightarrow t = \frac{L}{y} = \frac{12}{5}.$$

Ответ: $\dfrac{12}{5}$ ч

20 баллов	Полное обоснованное решение
15 баллов	Полное решение с недостатками в обосновании
10 баллов	Решение с вычислительной ошибкой
5 баллов	Получена только часть связей между переменными.
0 баллов	Решение не верно или отсутствует.

Олимпиада школьников "Шаг в будущее"

Профиль: математика.

Вариант: 4 Класс: 8

Задача 1 (*15 баллов*). На занятии математического кружка Антон предложил отгадать задуманную им обыкновенную дробь и дал 2 подсказки. Если числитель дроби оставить без изменения, а знаменатель возвести в квадрат, то получится дробь, равная 1/9. Если же числитель дроби увеличить на 1, а знаменатель уменьшить на 1, то получится дробь, равная 1. Через некоторое время ученики попросили еще подсказку. Узнав, что эта дробь больше, чем 1/2, дали ответ. Какую дробь задумал Антон? В ответ записать дробь без сокращений.

Решение.

Пусть a - числитель, b - знаменатель, получим

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b^2} = \dfrac{1}{9} \\ \dfrac{a+1}{b-1} = 1 \end{cases}.$$

Из второго уравнения $a = b - 2$, подставим в первое $b^2 - 9a + 18 = 0$, $b = 6;3$. Получим дроби 4/6; 1/3. В ответ идет первая дробь, но сокращать ее нельзя (убеждаемся проверкой).

Ответ: 4/6 .

Баллы	Критерии оценивания
15	Полное обоснованное решение.
12	Допущена арифметическая ошибка на последнем этапе при верном ходе рассуждений.
10	Дробь сокращена верно или недостаточно обоснованное решение.
5	Верно составлена система уравнений.
0	Неверные рассуждения или записан только ответ.

Задача 2 (*15 баллов*). Найдите все варианты троек (x;y;z), при которых выполняется уравнение

$$\sqrt{|2x| + x - 6} + \sqrt{|2y| \cdot |2 - x|} + \sqrt{|2z| + |x - 2| \cdot |x + 6|} = 0$$

Решение.

Все три слагаемые должны быть равны нулю одновременно.

(1) $|2x| = 6 - x; x = 2; x = -6$

(2) y=0 либо x=2

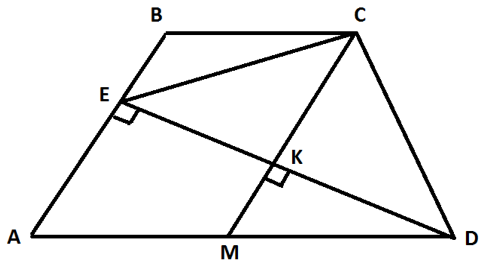
(3) z=0 и одновременно либо x=2;либо x=-6

Таким образом, $x = 2; y \in R; z = 0$; либо $x = -6; y = 0; z = 0$

Ответ: $x = 2; y \in R; z = 0$; либо $x = -6; y = 0; z = 0$

Баллы	Критерии оценивания
15	Полное обоснованное решение
10	Упущено одно из решений
5	Совершен переход к системе трех уравнений

Задача 3 (*15 баллов*). В трапеции ABCD, $AD \parallel BC$ так, $AD = 2BC$. Точка E принадлежит AB так, что $AB \perp DE$. Найти периметр $\triangle ECD$ если ED=m, CD=n.
Решение.



Пусть точка M середина AD, тогда
$AM = BC \Rightarrow ABCM$ параллелограмм.
Пусть
$$DE \cap CM = K \Rightarrow \angle AED = \angle MKD = 90^0$$
KM средняя линия $\triangle AED \Rightarrow EK = KD$.

В треугольнике ECD CK - высота и медиана $\Rightarrow \triangle ECD$ равнобедренный, $EC = CD$.
$$P_{\triangle ECD} = m + 2n$$

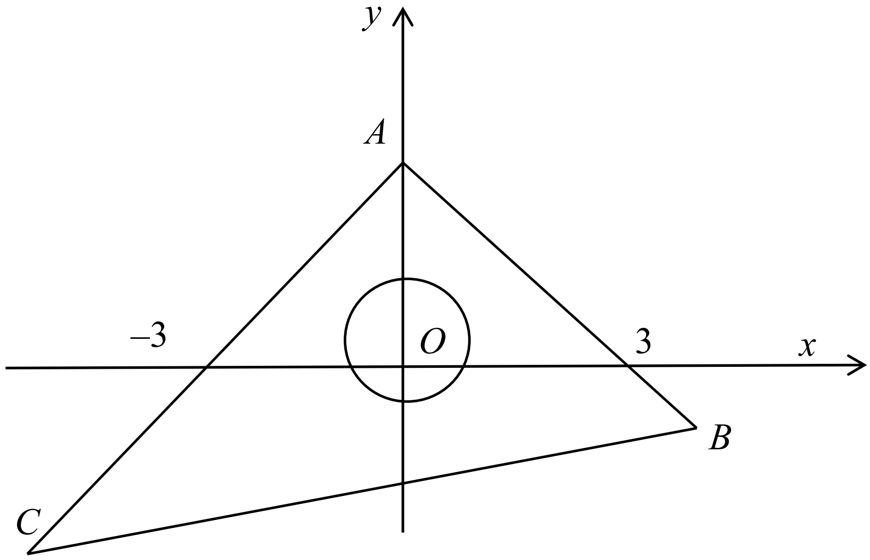
Ответ: $m + 2n$.

Баллы	Критерии оценивания
15	Решение верно.
10	Решение верно, но недостаточно обоснованно или допущена одна ошибка.
5	Доказано одно из промежуточных утверждений.
0	Решение не верно или отсутствует

Задача 4 (*15 баллов*). Известно, что окружность с центром $E\left(0;\frac{1}{3}\right)$ проходит через точку $K\left(\frac{1}{3};\frac{1+\sqrt{8}}{3}\right)$. Какую площадь имеет фигура, ограниченная этой окружностью и графиками функций $y = 3 - |x|$ и $5y - x = -9$?
Решение.

Найдем радиус окружности $KE^2 = \frac{1}{9} + \frac{(\sqrt{8})^2}{9} = 1$, он равен 1.

Изобразим на плоскости xOy графики $y = 3 - x,\ y = 3 + x,\ y = \frac{x-9}{5}$. Они ограничивают треугольник с вершинами A(0;3), B(4;–1), C(–6; –3). Окружность не пересекает прямые. Надо найти площадь прямоугольного треугольника ABC без площади круга. Находим катеты $AB = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}, AC = 6\sqrt{2}$, площадь равна $\dfrac{AB \cdot AC}{2} - \pi \cdot 1^2 = 24 - \pi$



Ответ: $24 - \pi$

Баллы	Критерии оценивания
15	Полное обоснованное решение
12	Допущена арифметическая ошибка при верном ходе рассуждений или недостаточно обоснованное решение.
10	При любом верном ходе решения решена значительная часть задачи
5	Верно «раскрыт» модуль или найден радиус окружности или другое верное начало решения
0	Неверные рассуждения или записан только ответ.

Задача 5 (*20 баллов*). На стороне AC равнобедренного $\triangle ABC$ с основанием BC взята точка A_1, а на продолжении стороны BC за точку C точка C_1 так, что $\triangle BA_1C_1$ равнобедренный с вершиной в точке A_1.

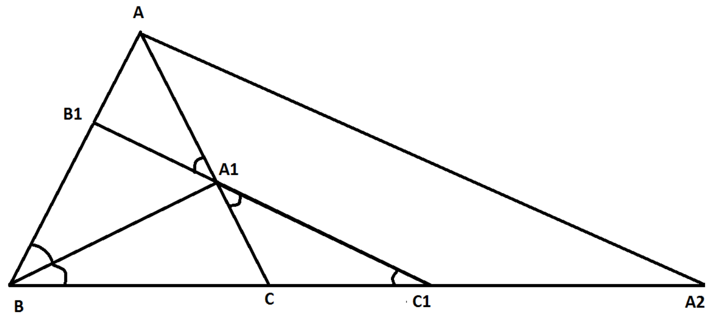
$$\angle A_1BC_1 = \frac{1}{2}\angle ABC,\ 3AB = 2BC,\ C_1A_1 \cap AB = B_1.$$

Найти отношение площади $\triangle ABC$ к площади $\triangle BB_1C_1$.

Решение.

Пусть в $\triangle ABC$ половина угла B равна $= \alpha$, тогда $\angle ACB = \angle ABC = 2\alpha$, $\angle C_1A_1C = \angle A_1CB - \angle A_1C_1C = 2\alpha - \alpha = \alpha$.

Пусть $AB = 10x$, тогда $BC = 15x$, в $AA_1 = 4x$, $A_1C = CC_1 = 6x$



Проведем $AA_2 \parallel B_1C_1 \Rightarrow$ по теореме Фалеса

$AA_1 : A_1C = CC_1 : C_1A_2 \Rightarrow BB_1 : B_1A = BC_1 : C_1A_2 = 21 : 4$.

$\triangle ABC$ и $\triangle BB_1C_1$ имеют одинаковый угол $\Rightarrow \dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BB_1C_1}} = \dfrac{AB \cdot BC}{BB_1 \cdot BC_1} = \dfrac{25}{21} \cdot \dfrac{15}{21} = \dfrac{125}{147}$

Ответ: $\dfrac{125}{147}$.

Баллы	Критерии оценивания
20	Решение верно.
15	Решение верно, но недостаточно обоснованно или допущена одна ошибка.
10	Доказано, что $\triangle A_1C_1C$ равнобедренный и найдено отношение отрезков B_1B к B_1A
5	Найдено одно из промежуточных утверждений.
0	Решение не верно или отсутствует.

Задача 6 (*20 баллов*). На горно-обогатительный комбинат привозят руду с трех месторождений. Хранилища комбината имеют фиксированный объём. На месторождениях работают люди и техника - невыгодно, чтобы они простаивали. У каждого месторождения своя система доставки, поэтому скорости доставки различны. Управляющий рассчитывает оптимальные способы подвоза руды, чтобы хранилище было заполнено рудой с разных месторождений. Выяснилось, что можно принимать руду со всех трех месторождений сразу в течение 4 часов. Второй вариант заполнения: с первого месторождения возить руду в течение 6 часов, со второго и третьего в течение 2 часов. Проверяется еще один вариант: возить с первого месторождения 5 часов, со второго 3 часа. Сколько часов надо тогда подвозить руду с третьего месторождения, чтобы заполнить хранилище?

Решение.

Обозначим скорости доставки с 1.2.3 месторождений соответственно. H- объём хранилища. m- искомое время.

$$4x + 4y + 4z = H(1); 6x + 2y = 2z = H(2); 5x + 3y + mz = H(3)$$

Сложим первые два уравнения, а третье умножим на 2.

$$10x + 6y + 6z = 2H; 10x + 6y + 2mz = 2H; 10x + 6y = 2H - 6z = 2H - 2mz; m = 3$$

Ответ:3 часа.

Баллы	Критерии оценивания
20	Полное обоснованное решение.
15	Решение с недостатками обоснования.
10	Решение с вычислительной ошибкой.
5	Написаны уравнения, но не решена система.