Вариант № 1 (11 класс, отборочный этап)

1. Производство керамических изделий состоит из 3 последовательных этапов: формование керамического изделия на гончарном круге в течение 15 минут, сушка в течение 10 минут, и обжиг в течение 30 минут. Требуется изготовить 75 изделий. Как распределить 13 мастеров на формовщиков и обжигальщиков для работы на 1 и 3 этапах соответственно в течение всего отведенного на этап времени (для сушки изделий рабочие не требуются), чтобы выполнить работу за кратчайшее время? В ответ запишите кратчайшее время (в минутах), необходимое для выполнения всей работы. Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

2. Решите уравнение $\frac{15}{x(\sqrt[3]{35-8x^3})}=2x+\sqrt[3]{35-8x^3}$. В ответ запишите сумму всех полученных решений. (5 баллов)

3. Найдите все натуральные значения n, при которых

$$\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cdots+\cos\frac{2\pi n}{9}=\cos\frac{\pi}{9}, \text{ и } \log_2^2 n+45<\log_2 8n^{13}.$$

В ответ запишите сумму полученных значений n. (6 баллов)

4. Сколькими способами можно распилить ствол бамбука (неоднородный природный материал) длиной 4 м на три части, длины которых кратны 1 дм, и из которых можно составить треугольник? (12 баллов)

5. Сколько решений в натуральных числах $x,\ y$ имеет неравенство $x/76+y/71<1$? (12 баллов)

6. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник, координаты вершин которого удовлетворяют уравнению

$|y+1|(y^2+2y+28)+|x-2|=9(y^2+2y+4)$, а стороны параллельны осям координат? (12 баллов)

7. Вписанная в треугольник *ABC* окружность радиуса 3 касается стороны *AC* в точке *D*. На продолжениях сторон *AC* и *BC* за точку *C* взяты точки *K* и *L* соответственно, угол *CKL* равен 30°. Длины отрезков *AK* и *BL* равны полупериметру треугольника *ABC*. На описанной около треугольника *ABC* окружности выбрана точка *M* так, что *CM* || *KL*. Найдите косинус угла *ACB*, если длина отрезка *DM* равна 6. (16 баллов)

8. Укажите наименьшее значение параметра a, при котором уравнение имеет хотя бы одно решение

$$2\sin\left(\pi-\frac{\pi x^2}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\sqrt{9-x^2}\right)+1=a+2\sin\left(\frac{\pi}{6}\sqrt{9-x^2}\right)\cos\left(\frac{\pi x^2}{12}\right).$$ (16 баллов)

9. Ромб *ABCD* является основанием пирамиды с вершиной *S*. Все ее боковые грани наклонены к плоскости основания под одинаковым углом 60°. Точки *M*, *N*, *K* и *L* являются серединами сторон ромба *ABCD*. На прямоугольнике *MNKL*, как на основании, построен прямоугольный параллелепипед. Ребра верхней грани параллелепипеда (противоположной грани *MNKL*) пересекают боковые ребра пирамиды *SABCD*, соответственно, в точках *F*, *P*, *R* и *Q*. Объем многогранника с вершинами в точках *M*, *N*, *K*, *L*, *F*, *P*, *R*, *Q* равен $12\sqrt{3}$, а радиус вписанной в ромб *ABCD* окружности равен 2,4. Найдите сторону ромба *ABCD*. (16 баллов)

Решение варианта № 1 (11 класс, отборочный этап)

1. Производство керамических изделий состоит из 3 последовательных этапов: формование керамического изделия на гончарном круге в течение 15 минут, сушка в течение 10 минут, и обжиг в течение 30 минут. Требуется изготовить 75 изделий. Как распределить 13 мастеров на формовщиков и обжигальщиков для работы на 1 и 3 этапах соответственно в течение всего отведенного на этап времени (для сушки изделий рабочие не требуются), чтобы выполнить работу за кратчайшее время? В ответ запишите кратчайшее время (в минутах), необходимое для выполнения всей работы. Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

Решение. Формовщиков – 4, декораторов – 8. Тринадцатый мастер может работать на любом этапе, может вообще не участвовать в работе. В этом случае время работы – 325 минут $\left(55 + \left(\left[\frac{75}{4}\right] + 1\right) \cdot 15 = 325\right)$. Покажем, что при других расстановках время работы больше. Предположим, что формовщиков меньше 4 (3, 2 или 1), то время на формовку не меньше 375 минут. Если же декораторов меньше 8, то время на выполнение 3 этап не менее 330 минут. **Ответ: 325**

2. Решите уравнение $\frac{15}{x(\sqrt[3]{35-8x^3})} = 2x + \sqrt[3]{35-8x^3}$. В ответ запишите сумму всех полученных решений. (5 баллов)

Решение.

$u = \sqrt[3]{35-8x^3},\ 8x^3 = 35 - u^3,$

$$\begin{cases} \frac{15}{xu} = 2x + u, \\ 8x^3 + u^3 = 35, \end{cases} \quad t = 2xu, v = 2x + u \ \Rightarrow \begin{cases} \frac{30}{t} = v, \\ v(v^2 - 3t) = 35, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 6, \\ v = 5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} xu = 3, \\ 2x + u = 5, \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 2{,}5.$$

Ответ: 2,5

3. Найдите все натуральные значения n, при которых

$$\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cdots + \cos\frac{2\pi n}{9} = \cos\frac{\pi}{9}, \text{ и } \log_2^2 n + 45 < \log_2 8n^{13}.$$

В ответ запишите сумму полученных значений n. (6 баллов)

Решение.

$cos\frac{2\pi}{9} + cos\frac{4\pi}{9} + \cdots + cos\frac{2\pi n}{9} = cos\frac{\pi}{9} \quad \Leftrightarrow 2\,sin\frac{\pi}{9}cos\frac{2\pi}{9} + 2\,sin\frac{\pi}{9}cos\frac{4\pi}{9} + \cdots + 2\,sin\frac{\pi}{9}cos\frac{2\pi n}{9} = 2\,sin\frac{\pi}{9}cos\frac{\pi}{9} \Leftrightarrow$

$$sin\frac{3\pi}{9} - sin\frac{\pi}{9} + sin\frac{5\pi}{9} - sin\frac{3\pi}{9} + \cdots + sin\frac{\pi}{9}(1+2n) - sin\frac{\pi}{9}(2n-1) = sin\frac{2\pi}{9} \Leftrightarrow$$

$sin\frac{\pi}{9}(1+2n) - sin\frac{\pi}{9} = sin\frac{2\pi}{9} \Leftrightarrow sin\frac{\pi}{9}(1+2n) = sin\frac{2\pi}{9} + sin\frac{\pi}{9} \Leftrightarrow sin\frac{\pi}{9}(1+2n) = 2\,sin\frac{\pi}{6}cos\frac{\pi}{18} \Leftrightarrow sin\frac{\pi}{9}(1+2n) = sin\frac{4\pi}{9} \Leftrightarrow 2\,sin(\frac{\pi n}{9} - \frac{\pi}{6})\,cos(\frac{\pi n}{9} + \frac{5\pi}{18}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi n}{9} - \frac{\pi}{6} = \pi k,\ k \in Z, \quad \frac{\pi n}{9} + \frac{5\pi}{18} = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z, \Leftrightarrow 2n = 3(6k+1),\ k \in Z, \quad n = 2 +$

$9m,\ m \in Z$. Поскольку n - натуральное число, то первое соотношение не имеет место (четное число не может быть равно нечетному). Итак, $n = 2 + 9m,\ m \in Z,\ m \geq 0$.

Решим неравенство $log_2^2\, n + 45 < log_2 8\, n^{13} \Leftrightarrow log_2^2\, n - 13\, log_2\, n + 42 < 0, \Leftrightarrow (log_2\, n - 6)(log_2\, n - 7) < 0, \Leftrightarrow 2^6 < n < 2^7, \Leftrightarrow 64 < 2 + 9m < 128,\ m \in Z,\ m \geq 0 \Leftrightarrow 6\frac{8}{9} < m < 14,\ m \in Z,\ m \geq 0 \Leftrightarrow m = 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13.\ S_7 = \frac{65+119}{2} \cdot$ 7=644.

Ответ: 644

4. Сколькими способами можно распилить ствол бамбука (неоднородный природный материал) длиной 4 м на три части, длины которых кратны 1 дм, и из которых можно составить треугольник? (12 баллов)

Решение.

. Пусть A_n — точка ствола на расстоянии n дм от основания. Будем пилить в точках A_p и A_q, $p < q$. Для соблюдения неравенства треугольника необходимо и достаточно, чтобы каждая часть получилась не длиннее 19 дм:

$$p \leq 19, \qquad 21 \leq q \leq p + 19.$$

Таким образом, число способов выбрать p и q будет

$$\sum_{p=1}^{19}(p + 19 - 20) = 0 + 1 + 2 + \ldots + 18 = \frac{18 \cdot 19}{2} = 171.$$

Ответ: 171

5. Сколько решений в натуральных числах $x,\ y$ имеет неравенство $x/76 + y/71 < 1$? (12 баллов)

Решение.

Все решения лежат в прямоугольнике

$$\Pi = \{0 < x < 76; \quad 0 < y < 41\}.$$

Нас интересует количество целочисленных точек, лежащих внутри Π ниже его диагонали $x/76 + y/41 = 1$. На самой диагонали нет целочисленных точек, т.к. 76 и 41 взаимно просты. Так что получаем половину количества целочисленных точек внутри Π:

$$\frac{75 \cdot 40}{2} = 1500.$$

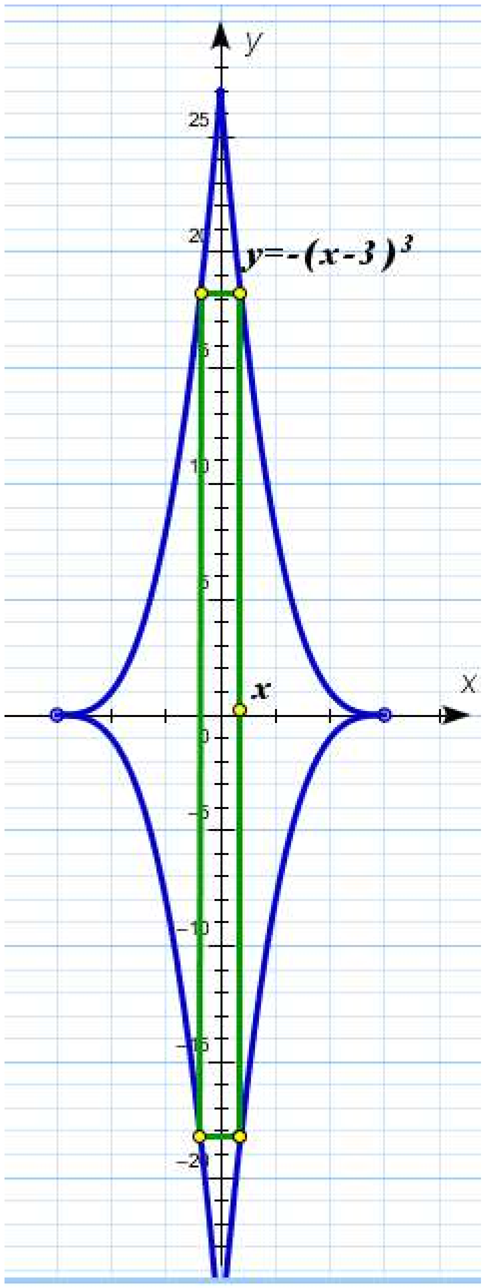
Ответ: 1500

6. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник, координаты вершин которого удовлетворяют уравнению

$$|y+1|(y^2+2y+28)+|x-2|=9(y^2+2y+4),$$

а стороны параллельны осям координат?

(12 баллов)



Решение.

$$|y+1|((y+1)^2+27)+|x-2|=9(y+1)^2+27$$

Замена: $x_1=y+1, y_1=x-2$.

Тогда $\quad |y_1|=-(|x_1|-3)^3$

Площадь прямоугольника при такой замене не меняется. Площадь вычисляется по формуле $S(x)=-4x(x-3)^3, x\in[0;3]$.

Имеем

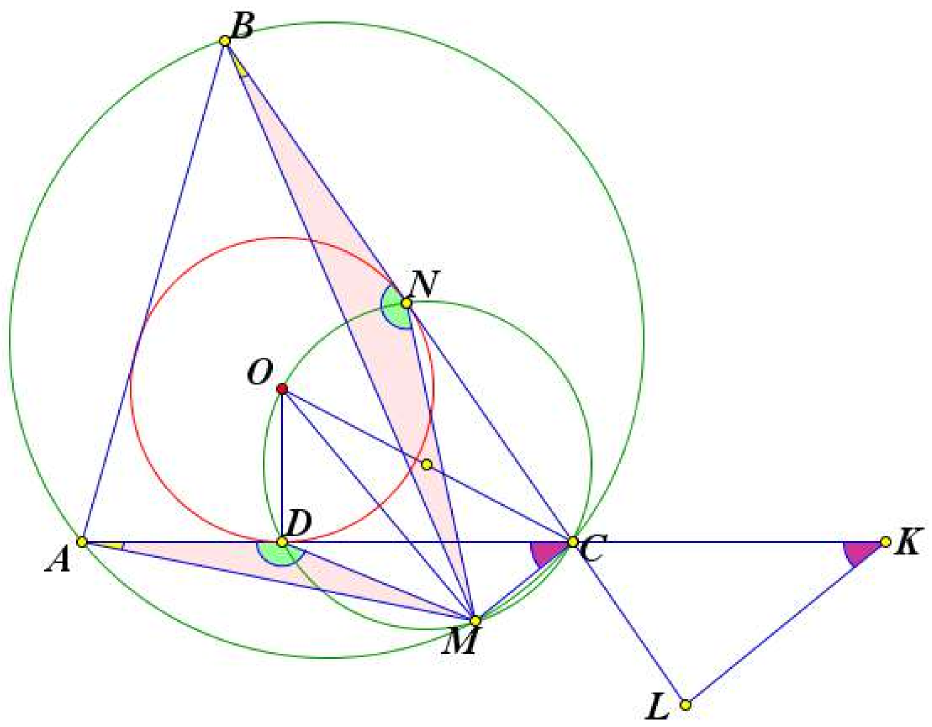
$$S'(x)=-4((x-3)^3+3x(x-3)^2)$$
$$=-4(x-3)^2(4x-3).$$

В точке $x=\frac{3}{4}$ функция $S(x)$ принимает наибольшее значение. $S_{max}=S(0{,}75)=34{,}171875$.

Ответ: $\mathbf{34,171875}$

7. Вписанная в треугольник *ABC* окружность радиуса 3 касается стороны *AC* в точке *D*. На продолжениях сторон *AC* и *BC* за точку *C* взяты точки *K* и *L* соответственно, угол *CKL* равен 30°. Длины отрезков *AK* и *BL* равны полупериметру треугольника *ABC*. На описанной около треугольника *ABC* окружности выбрана точка *M* так, что *CM* || *KL*. Найдите косинус угла *ACB*, если длина отрезка *DM* равна 6. (16 баллов)

Решение. Докажем, что угол $\angle OMC=90°$. Построим окружность *S* с диаметром *OC*. Обозначим точку пересечения (отличную от *C*) этой окружности с описанной около треугольника *ABC* через M_1. Обозначим точку пересечения (отличную от *C*) окружности *S* с прямой, параллельной *KL*, через M_2. Необходимо доказать, что $M_1=M_2$.



Докажем подобие треугольников ADM_1 и BNM_1. Согласно свойствам вписанных углов, имеем $\angle M_1AC = \angle M_1BC \Rightarrow \angle M_1AB = \angle M_1BN$; $\angle M_1NC = \angle M_1DC \Rightarrow \angle ADM_1 = \angle BNM_1$. Следовательно, $\Delta ADM_1 \sim \Delta BNM_1$ по двум углам. Тогда $\frac{DM_1}{M_1N} = \frac{AD}{BN}$. Поскольку длины отрезков AK и BL равны полупериметру треугольника ABC, то $AD = CL, BN = CK$. Получаем $\frac{DM_1}{M_1N} = \frac{CL}{CK}$.

Обозначим $\angle ACM_2 = \angle CKL = \alpha$, $\angle KCL = \beta$.

Тогда $\angle ACB = \beta, \angle M_2CB = \alpha + \beta$. Для треугольников DM_2C и M_2NC применим теорему синусов: $\frac{DM_2}{\sin\alpha} = \frac{M_2C}{\sin\angle M_2DC}$; $\frac{NM_2}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{M_2C}{\sin\angle M_2NC}$. Поскольку $\angle M_2DC = \angle M_2NC$, то $\frac{DM_2}{NM_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. Поскольку $\angle CLK = 180 - (\alpha + \beta)$, то, применяя теорему синусов для треугольника CLK, имеем $\frac{CL}{CK} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. Таким образом, $\frac{DM_2}{NM_2} = \frac{CL}{CK} = \frac{DM_1}{NM_1}$. Точки D, N, M_1, M_2 лежат на одной окружности, следовательно, $M_1 = M_2$.

Треугольник OMC прямоугольный, радиус описанной окружности равен $CO/2$. Эта же окружность описана около треугольника CDM.

$$OC = \frac{OD}{\sin(\beta/2)} = \frac{3}{\sin(\beta/2)}.$$

Угол CKL равен углу DCM. Тогда $\sin CKL = \frac{DM}{2R_{\text{оп}}} = \frac{DM}{OC} = 0{,}5$. Следовательно, $\sin(\beta/2) = 0{,}25$, $\cos\beta = 1 - 2\sin^2(\beta/2) = 7/8 = 0{,}875$.

Ответ: 0,875

8. Укажите наименьшее значение параметра a, при котором уравнение имеет хотя бы одно решение

$2\sin(\pi - \frac{\pi x^2}{12})\cos(\frac{\pi}{6}\sqrt{9-x^2}) + 1 = a + 2\sin(\frac{\pi}{6}\sqrt{9-x^2})\cos(\frac{\pi x^2}{12})$. (16 баллов)

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$2\sin(\pi - \frac{\pi x^2}{12})\cos(\frac{\pi}{6}\sqrt{9-x^2}) - 2\sin(\frac{\pi}{6}\sqrt{9-x^2})\cos(\pi - \frac{\pi x^2}{12}) = a - 1$, или

$\sin(\pi - \frac{\pi x^2}{12} - \frac{\pi}{6}\sqrt{9-x^2}) = \frac{a-1}{2}$.

Рассмотрим отдельно выражение $t = \pi - \frac{\pi x^2}{12} - \frac{\pi}{6}\sqrt{9-x^2}$, его можно переписать в виде:

$$\pi - \frac{\pi x^2}{12} - \frac{\pi}{6}\sqrt{9-x^2} = \frac{\pi}{12}(12 - x^2 - 2\sqrt{9-x^2}) = \frac{\pi}{12}\left(9 - x^2 - 2\sqrt{9-x^2} + 3\right)$$
$$= \frac{\pi}{12}\left((\sqrt{9-x^2} - 1)^2 + 2\right).$$

Учитывая, что корень принимает значения от 0 до 3, то $t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$, тогда $\sin t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Найдем, в каких пределах изменяется параметр: $\frac{1}{2} \le \frac{a-1}{2} \le 1 \Rightarrow 2 \le a \le 3$.

Ответ: 2

9. Ромб *ABCD* является основанием пирамиды с вершиной *S*. Все ее боковые грани наклонены к плоскости основания под одинаковым углом $60°$. Точки *M*, *N*, *K* и *L* являются серединами сторон ромба *ABCD*. На прямоугольнике *MNKL*, как на основании, построен прямоугольный параллелепипед. Ребра верхней грани параллелепипеда (противоположной грани *MNKL*) пересекают боковые ребра пирамиды *SABCD*, соответственно, в точках *F*, *P*, *R* и *Q*. Объем многогранника с вершинами в точках *M*, *N*, *K*, *L*, *F*, *P*, *R*, *Q* равен $12\sqrt{3}$, а радиус вписанной в ромб *ABCD* окружности равен 2,4. Найдите сторону ромба *ABCD*. (16 баллов)

Решение.

Высота пирамиды $SO = h$. Диагонали ромба $AC = d_1, BD = d_2$.
Высота параллелепипеда $h/2$, стороны основания параллелепипеда равны $d_1/2$ и $d_2/2$.
Объем параллелепипеда равен

$$V_{\text{п}} = \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} \cdot \frac{h}{2}$$

Объем многогранника равен

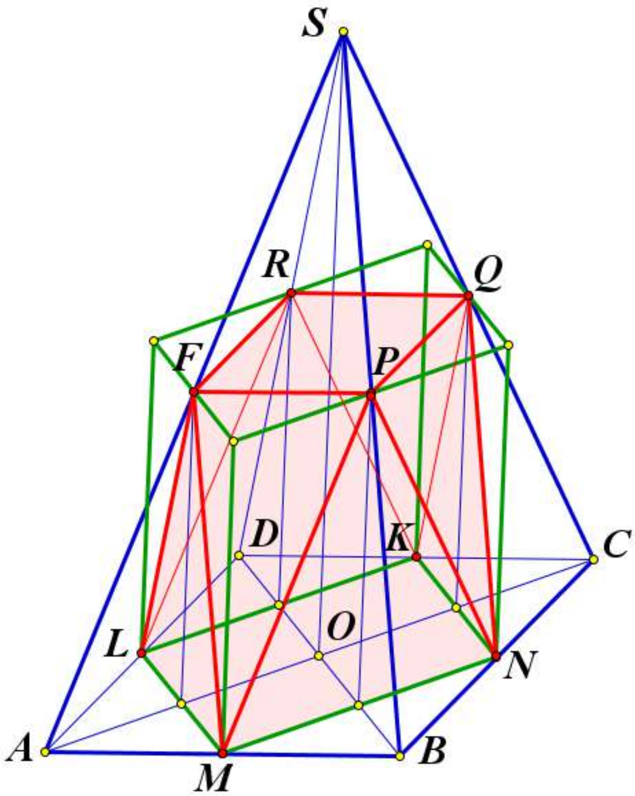
$$V_{\text{м}} = V_{\text{п}} - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{4} \cdot \frac{d_2}{4} \cdot \frac{h}{2} = \frac{d_1 d_2 h}{8} - \frac{d_1 d_2 h}{48} = \frac{5 d_1 d_2 h}{48}$$

По условию $\frac{5d_1 d_2 h}{48} = 12\sqrt{3}$. Поскольку радиус вписанной в этот ромб окружности равен 2,4, а все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60°, то $h = 2{,}4\sqrt{3}$. Следовательно,

$\frac{5d_1 d_2 \cdot 2{,}4\sqrt{3}}{48} = 12\sqrt{3}$, и $d_1 d_2 = 48$.

Поскольку $S_{ABCD} = \frac{d_1 d_2}{2}$, и $S_{ABCD} = \frac{4AB \cdot r_{\text{вп}}}{2} = 4{,}8 \cdot AB$, то $4{,}8 \cdot AB = 24 \Rightarrow AB = 5$.

Ответ: 5



Вариант № 2 (11 класс, отборочный этап)

1. Цех выпускает изделия видов A и B. На одно изделие вида A расходуется 10 *кг* стали и 23 *кг* цветных металлов, а на изделие вида B – 70 *кг* стали и 40 *кг* цветных металлов. От реализации изделия вида A прибыль составляет 80 тысяч рублей, вида B – 100 тысяч рублей. Сменный фонд стали составляет 700 *кг*, цветных металлов – 642 *кг*. Сколько изделий видов A и B нужно выпускать за смену, чтобы получить наибольшую прибыль от продажи изделий, если расход ресурсов не должен превышать выделенных на смену фондов? В ответ запишите наибольшую прибыль (в тысячах рублей), которая может быть получена при этих условиях. Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

2. Решите уравнение $\frac{x}{3}+\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}=\frac{35}{12}$. В ответ запишите сумму всех полученных решений. (5 баллов)

3. Решите неравенство $x^2 \le 2\left(\left[\sqrt[3]{x}+0{,}5\right]+\left[\sqrt[3]{x}\right]\right)$, где $[x]$ – целая часть числа x, т. е. $[x]$ – целое число, для которого верно неравенство $[x] \le x < [x]+1$. В ответ запишите разность наибольшего и наименьшего решений неравенства. (6 баллов)

4. Сколькими способами можно разложить число 210 в произведение четырех натуральных чисел? Порядок сомножителей неважен. (12 баллов)

5. Последовательность задана рекуррентно:
$x_0=0,\ x_{n+1}=\frac{(n^2+n+1)x_n+1}{n^2+n+1-x_n}$. Найдите x_{8453}. (12 баллов)

6. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, координаты вершин которого удовлетворяют уравнению $|y-x|=(y+x+1)(5-x-y)$, а стороны параллельны прямым $y=x$ и $y=-x$? В ответ запишите квадрат значения найденной площади. (12 баллов)

7. Вписанная в треугольник ABC окружность радиуса 2 касается стороны AC в точке D, угол C этого треугольника равен $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8}$. На продолжениях сторон AC и BC за точку C взяты точки K и L соответственно. Длины отрезков AK и BL равны полупериметру треугольника ABC. На описанной около треугольника ABC окружности выбрана точка M так, что $CM \parallel KL$. Найдите синус угла CKL, если длина отрезка DM равна 4. (16 баллов)

8. Укажите наибольшее значение параметра p, при котором уравнение имеет хотя бы одно решение

$2\cos\left(2\pi-\frac{\pi x^2}{6}\right)cos\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{9-x^2}\right)-3=p-2\sin\left(-\frac{\pi x^2}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{9-x^2}\right)$. (16 баллов)

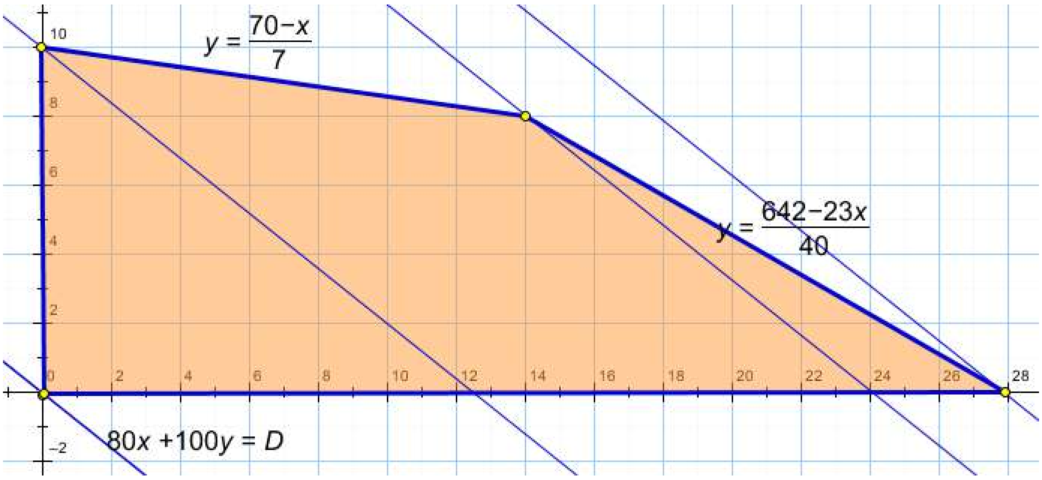
9. Боковая грань правильной треугольной пирамиды $SABC$ наклонена к плоскости основания ABC под углом $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. Точки M, N, K являются серединами сторон основания ABC. Треугольник MNK является нижним основанием прямой призмы. Ребра верхнего основания призмы пересекают боковые ребра пирамиды $SABC$, соответственно, в точках F, P и R. Площадь полной поверхности многогранника с вершинами в точках M, N, K, F, P, R равна $53\sqrt{3}$. Найдите сторону треугольника ABC.

(16 баллов)

Решение варианта № 2 (11 класс, отборочный этап)

1. Цех выпускает изделия видов A и B. На одно изделие вида A расходуется 10 *кг* стали и 23 *кг* цветных металлов, а на изделие вида B – 70 *кг* стали и 40 *кг* цветных металлов. От реализации изделия вида A прибыль составляет 80 тысяч рублей, вида B – 100 тысяч рублей. Сменный фонд стали составляет 700 *кг*, цветных металлов – 642 *кг*. Сколько изделий видов A и B нужно выпускать за смену, чтобы получить наибольшую прибыль от продажи изделий, если расход ресурсов не должен превышать выделенных на смену фондов? В ответ запишите наибольшую прибыль (в тысячах рублей), которая может быть получена при этих условиях. Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

Решение. Пусть x – количество изделий вида A, y – количество изделий вида B. Тогда прибыль за смену вычисляется по формуле $D = 80x + 100y$, причем $10x + 70y \leq 700$, $23x + 40y \leq 642$, x и y – целые неотрицательные числа.



$10x + 70y \leq 700 \quad \Leftrightarrow \quad y \leq 10 - \frac{x}{7}, \quad 23x + 40y \leq 642 \quad \Leftrightarrow \quad y \leq 16{,}05 - \frac{23x}{40}.$

Точка пересечения прямых $x + 7y = 70$ и $23x + 40y = 642$ есть точка с координатами $x = 14,\ y = 8$. В этом случае $D = 80 \cdot 14 + 100 \cdot 8 = 1920$, но при $x = \frac{642}{23} = 27\frac{21}{23},\ y = 0$имеем максимальное значение функции $D = 80x + 100y$ при неотрицательных x и y, удовлетворяющим неравенствам $10x + 70y \leq 700$, $23x + 40y \leq 642$. Это значение равно $2233\frac{1}{23}$. Поскольку x и y – целые числа, то при $y = 0$, $x = 27$ доход $D = 2160$, при $y = 1$, $x \leq \frac{602}{23}$, $x = 26$, $D = 2180$, при $y = 2$, $x \leq \frac{562}{23}$, $x = 24$, $D = 2120$. Таким образом, максимальный доход равен 2180 тыс. рублей при условии выпуска одного изделия вида A и 26 изделий вида B.

Ответ: 2180

2. Решите уравнение $\frac{x}{3}+\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}=\frac{35}{12}$. В ответ запишите сумму всех полученных решений. (5 баллов)

Решение. $x=\frac{3}{\sin t}, t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{1}{\sin t}+\frac{1}{\cos t}=\frac{35}{12}, \qquad 24(\sin t+\cos t)=35((\sin t+\cos t)^2-1),$$

$$z=\sin t+\cos t, \ \ 35z^2-24z-35=0,$$

$$z_1=-\frac{5}{7}, z_2=\frac{7}{5}, \sin t+\cos t=\frac{7}{5},$$

$$y=\sin t, \qquad y+\sqrt{1-y^2}=\frac{7}{5},$$

$$\sin t_1=\frac{3}{5}, \sin t_2=\frac{4}{5}, \ \ x_1=5, \ \ x_2=\frac{15}{4}, x_1+x_2=5+\frac{15}{4}.$$

Ответ: 8,75

3. Решите неравенство $x^2 \leq 2\left(\left[\sqrt[3]{x}+0{,}5\right]+\left[\sqrt[3]{x}\right]\right)$, где $[x]$ – целая часть числа x, т.е. $[x]$ – целое число, для которого верно неравенство $[x] \leq x < [x]+1$. В ответ запишите разность наибольшего и наименьшего решений неравенства.

Решение. Сделаем замену $t=\sqrt[3]{x}$. Имеем $t^6 \leq 2([t+0{,}5]+[t])$.

1. $t<0 \Rightarrow [t+0{,}5] \leq 0, [t]<0 \Rightarrow [t+0{,}5]+[t]<0, t^6<0$.
   Решений нет.
2. $0 \leq t < 0{,}5 \Rightarrow [t+0{,}5]=0, [t]=0 \Rightarrow t^6 \leq 0, t=0, x=0$.
3. $0{,}5 \leq t < 1 \Rightarrow [t+0{,}5]=1, [t]=0 \Rightarrow t^6 \leq 2, \quad 0{,}5 \leq t \leq \sqrt[6]{2}$,

$$\sqrt[6]{2}>1 \Rightarrow 0{,}5 \leq t < 1 \Rightarrow 0{,}125 \leq x < 1.$$

4. $1 \leq t < 1{,}5 \Rightarrow [t+0{,}5]=1, [t]=1 \Rightarrow t^6 \leq 4, \quad 1 \leq t \leq \sqrt[3]{2}$,

$$\sqrt[6]{4}<1{,}5 \Rightarrow 1 \leq x < 2.$$

5. $1{,}5 \leq t \Rightarrow t^6=t^5 \cdot t \geq (1{,}5)^5 \cdot t = 7\frac{19}{32} \cdot t > 4t+1 = 2((t+0{,}5)+t) \geq$ $2([t+0{,}5]+[t]) \Rightarrow \ t^6 > 2([t+0{,}5]+[t])$. Неравенство $t^6 \leq 2([t+0{,}5]+[t])$ решений не имеет.

Итак, $x \in \{0\} \cup [0{,}125; 2]$.

Ответ: 2

4. Сколькими способами можно разложить число 210 в произведение четырех натуральных чисел? Порядок сомножителей неважен. (12 баллов)

Решение.

Разложим 210 в произведение простых чисел: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Посмотрим, как 4 простых делителя могут распределиться по искомым сомножителям.

1) $4+0+0+0$ — 1 способ.

2) $3+1+0+0$ — $C_4^3 = 4$ способа.

3) $2+2+0+0$ — $C_4^2/2 = 3$ способа.

4) $2+1+1+0$ — $C_4^2 = 6$ способов.

5) $1+1+1+1$ — 1 способ.

Ответ: 15.

Ответ: 15

5. Последовательность задана рекуррентно:

$x_0 = 0,\ x_{n+1} = \frac{(n^2+n+1)x_n+1}{n^2+n+1-x_n}$. Найдите x_{8453}. (12 баллов)

Решение.

Вычисляем $x_1 = \frac{1}{1} = 1$, $x_2 = \frac{4}{2} = 2$, $x_3 = \frac{15}{5} = 3$, появляется гипотеза: $x_n = n$. Проверим по индукции:

$$x_{n+1} = \frac{(n^2+n+1)n+1}{n^2+n+1-n} = \frac{n^3+n^2+n+1}{n^2+1} = n+1.$$

Ответ: 8453

6. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, координаты вершин которого удовлетворяют уравнению $|y-x| = (y+x+1)(5-x-y)$, а стороны параллельны прямым $y = x$ и $y = -x$? В ответ запишите квадрат значения найденной площади. (12 баллов)

Решение.

Замена: $x_1 = x+y, y_1 = y-x$. Эта замена увеличивает все размеры в $\sqrt{2}$ раз. Имеем $|y_1| = (x_1+1)(5-x_1)$, $S(x_1) = 4(x_1-2)(x_1+1)(5-x_1)$, $x_1 \in (2;5)$.

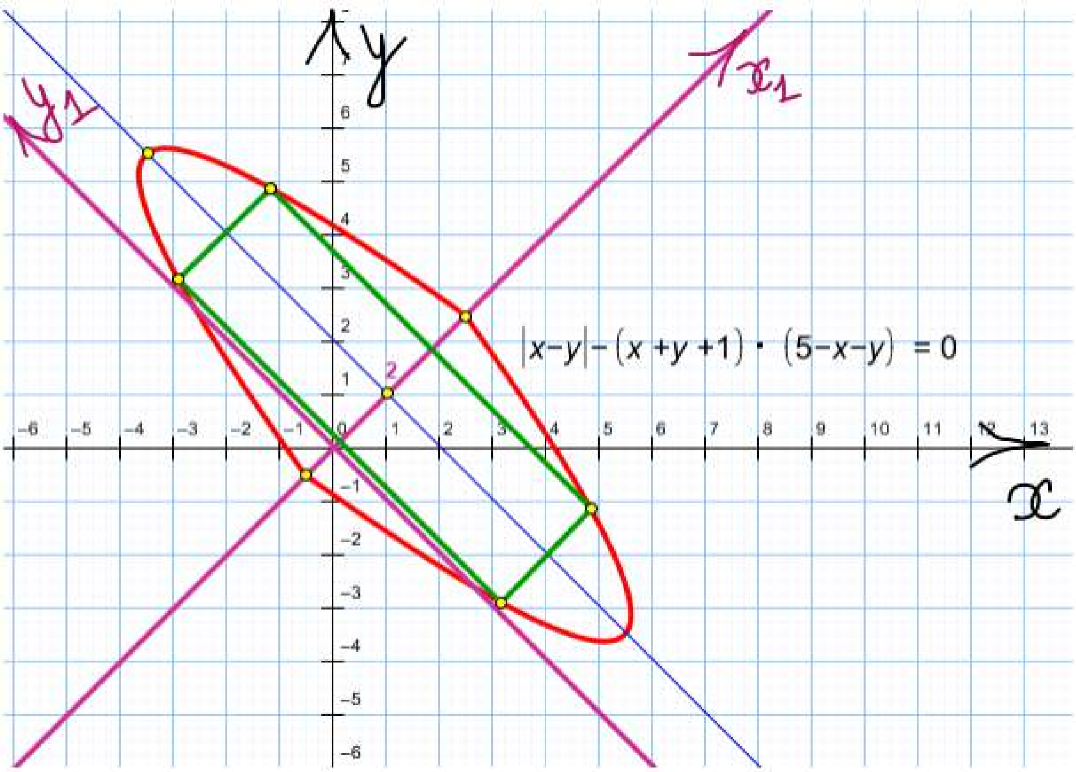
$$S'(x_1) = 4\big((x_1+1)(5-x_1) + (x_1-2)(5-x_1) - (x_1-2)(x_1+1)\big) =$$
$$= -12({x_1}^2 - 4x_1 + 1) = -12\big(x_1 - 2 - \sqrt{3}\big)\big(x_1 - 2 + \sqrt{3}\big) = 0.$$

Наибольшее значение площадь принимает в точке $x_1 = 2+\sqrt{3}$. В системе координат Ox_1y_1 наибольшее значение площади равно

$$S\big(2+\sqrt{3}\big) = 4\sqrt{3}\big(3+\sqrt{3}\big)\big(3-\sqrt{3}\big) = 24\sqrt{3}.$$

В исходной системе координат $S_{max} = 12\sqrt{3}$. $(S_{max})^2 = 432$. Ответ: **432**

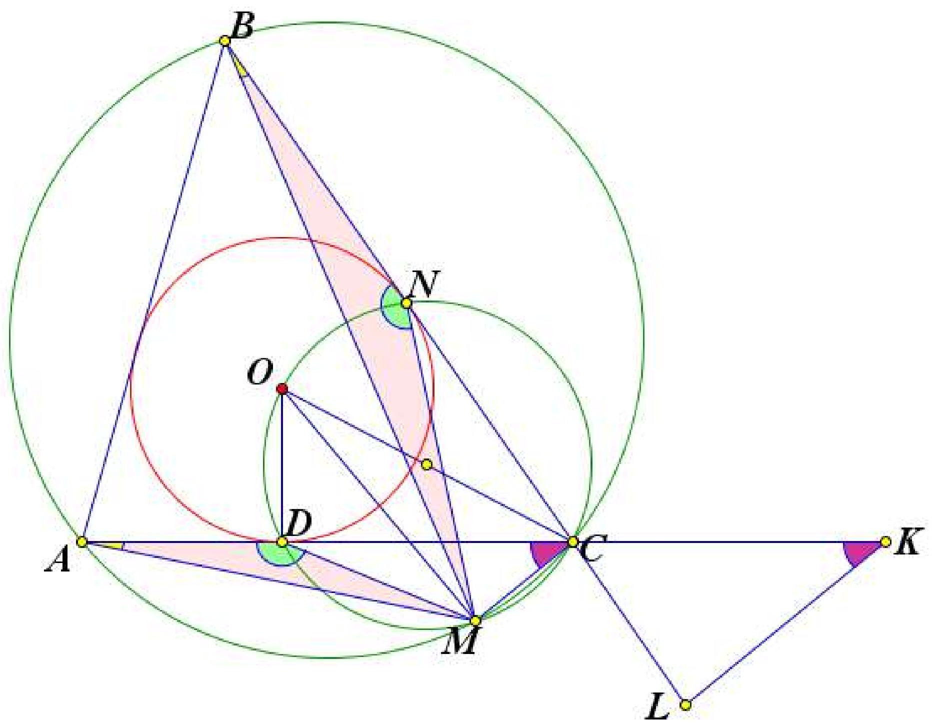
Ответ: 432



7. Вписанная в треугольник *ABC* окружность радиуса 2 касается стороны *AC* в точке *D*, угол *C* этого треугольника равен $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8}$. На продолжениях сторон *AC* и *BC* за точку *C* взяты точки *K* и *L* соответственно. Длины отрезков *AK* и *BL* равны полупериметру треугольника *ABC*. На описанной около треугольника *ABC* окружности выбрана точка *M* так, что *CM* || *KL*. Найдите синус угла *CKL*, если длина отрезка *DM* равна 4. (16 баллов)

Решение. Докажем, что угол $\angle OMC = 90°$. Построим окружность *S* с диаметром *OC*. Обозначим точку пересечения (отличную от *C*) этой окружности с описанной около треугольника *ABC* через M_1. Обозначим точку пересечения (отличную от *C*) окружности *S* с прямой, параллельной *KL*, через M_2. Необходимо доказать, что $M_1 = M_2$.

Докажем подобие треугольников ADM_1 и BNM_1. Согласно свойствам вписанных углов, имеем $\angle M_1AC = \angle M_1BC \Rightarrow \angle M_1AB = \angle M_1BN$; $\angle M_1NC = \angle M_1DC \Rightarrow \angle ADM_1 = \angle BNM_1$. Следовательно, $\Delta ADM_1 \sim \Delta BNM_1$ по двум углам. Тогда $\frac{DM_1}{M_1N} = \frac{AD}{BN}$. Поскольку длины отрезков *AK* и *BL* равны полупериметру треугольника *ABC*, то $AD = CL, BN = CK$. Получаем $\frac{DM_1}{M_1N} = \frac{CL}{CK}$.



Обозначим $\angle ACM_2 = \angle CKL = \alpha,\ \angle KCL = \beta.$

Тогда $\angle ACB = \beta, \angle M_2CB = \alpha + \beta$. Для треугольников DM_2C и M_2NC применим теорему синусов: $\frac{DM_2}{\sin\alpha} = \frac{M_2C}{\sin\angle M_2DC}$; $\frac{NM_2}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{M_2C}{\sin\angle M_2NC}$. Поскольку $\angle M_2DC = \angle M_2NC$, то $\frac{DM_2}{NM_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. Поскольку $\angle CLK = 180 - (\alpha+\beta)$, то, применяя теорему синусов для треугольника CLK, имеем $\frac{CL}{CK} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. Таким образом, $\frac{DM_2}{NM_2} = \frac{CL}{CK} = \frac{DM_1}{NM_1}$. Точки D, N, M_1, M_2 лежат на одной окружности, следовательно, $M_1 = M_2$.

Треугольник OMC прямоугольный, радиус описанной окружности равен $CO/2$. Эта же окружность описана около треугольника CDM.

$$OC = \frac{OD}{\sin\angle DCO} = \frac{2}{\sqrt{(1-\cos\angle ACB)/2}} = 8.$$

Угол CKL равен углу DCM. Тогда $\sin CKL = \frac{DM}{2R_{\text{оп}}} = \frac{DM}{OC} = 0{,}5$.

Ответ: 0,5

8. Укажите наибольшее значение параметра p, при котором уравнение имеет хотя бы одно решение

$2\cos(2\pi - \frac{\pi x^2}{6})\, cos(\frac{\pi}{3}\sqrt{9-x^2}) - 3 = p - 2\sin(-\frac{\pi x^2}{6})\cos(\frac{\pi}{3}\sqrt{9-x^2})$. (16 баллов)

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$\cos(2\pi - \frac{\pi x^2}{6})\cos(\frac{\pi}{3}\sqrt{9-x^2}) + \sin(2\pi - \frac{\pi x^2}{6})\, sin(\frac{\pi}{3}\sqrt{9-x^2}) = \frac{p+3}{2}$, или

$\cos(2\pi - \frac{\pi x^2}{6} - \frac{\pi}{3}\sqrt{9-x^2}) = \frac{p+3}{2}$.

Рассмотрим отдельно выражение $t = 2\pi - \frac{\pi x^2}{6} - \frac{\pi}{3}\sqrt{9-x^2}$, его можно переписать в виде:

$$2\pi - \frac{\pi x^2}{6} - \frac{\pi}{3}\sqrt{9-x^2} = \frac{\pi}{6}(12 - x^2 - 2\sqrt{9-x^2}) = \frac{\pi}{6}\left(9 - x^2 - 2\sqrt{9-x^2} + 3\right)$$
$$= \frac{\pi}{6}\left((\sqrt{9-x^2} - 1)^2 + 2\right).$$

Учитывая, что корень принимает значения от 0 до 3, то $t \in \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$, тогда $\cos t \in \left[-1; \frac{1}{2}\right]$. Найдем, в каких пределах изменяется параметр:

$-1 \leq \frac{p+3}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -5 \leq p \leq -2$.

Ответ: -2

9. Боковая грань правильной треугольной пирамиды *SABC* наклонена к плоскости основания *ABC* под углом $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. Точки *M*, *N*, *K* являются серединами сторон основания *ABC*. Треугольник *MNK* является нижним основанием прямой призмы. Ребра верхнего основания призмы пересекают боковые ребра пирамиды *SABC*, соответственно, в точках *F*, *P* и *R*. Площадь полной поверхности многогранника с вершинами в точках *M*, *N*, *K*, *F*, *P*, *R* равна $53\sqrt{3}$. Найдите сторону треугольника *ABC*.

(16 баллов)

Решение.

Высота пирамиды $SO = h$. Сторона основания пирамиды $AC = a$.
Высота призмы $3h/4$, стороны основания призмы равны $a/2$.
Площадь треугольника *MNK*:

$$S_{MNK} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$$

Площадь треугольника *FPR*:

$$S_{FPR} = \frac{a^2\sqrt{3}}{64}$$

Площадь треугольника *MPN*:

$$S_{MPN} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{3h}{4},\ \ S_{MPN} = S_{NPK} == S_{KRM}.$$

Площадь треугольника *FPM*: $S_{FPN} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{4}\cdot\sqrt{\frac{9h^2}{16} + \frac{3a^2}{64}}, \quad S_{FPN} = S_{PRK} = S_{RFM}.$

Поскольку радиус вписанной в треугольник *ABC* окружности равен $\frac{a\sqrt{3}}{6}$, а все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$, то
$h = a\sqrt{3}/8$.

По условию площадь полной поверхности многогранника с вершинами в точках M, N, K, F, P, R равна $53\sqrt{3}$, т. е.

$$S_{\text{мн}} = S_{MNK} + S_{FPR} + 3S_{MPN} + 3S_{FPN} =$$

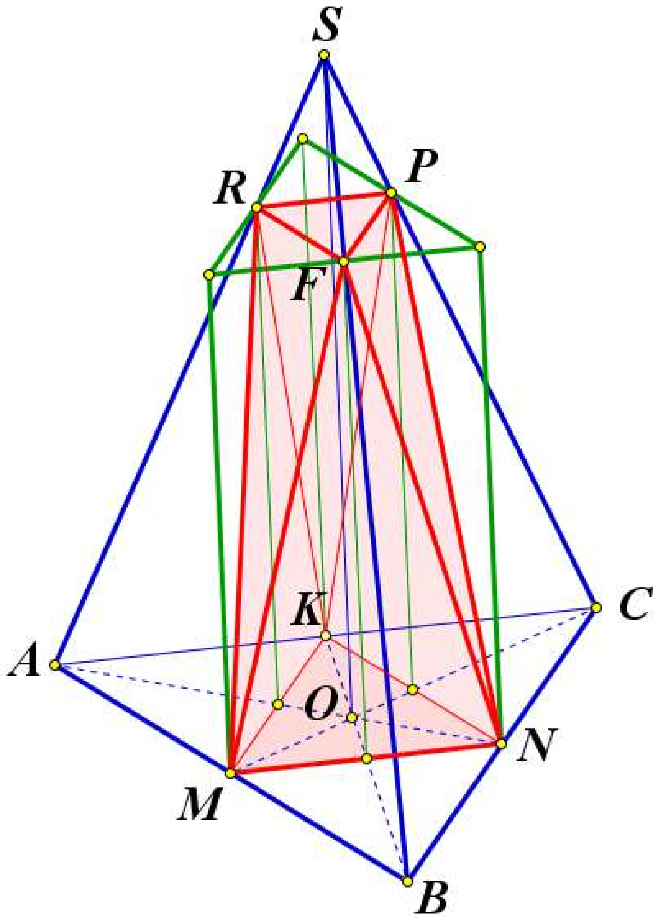
$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{16} + \frac{a^2\sqrt{3}}{64} + \frac{9ah}{16} + \frac{3a}{8}\sqrt{\frac{9h^2}{16} + \frac{3a^2}{64}} =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{16} + \frac{a^2\sqrt{3}}{64} + \frac{9a^2\sqrt{3}}{128}$$

$$+ \frac{3a}{8}\sqrt{\frac{27a^2}{16\cdot 64} + \frac{3a^2}{64}} =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{16} + \frac{a^2\sqrt{3}}{64} + \frac{9a^2\sqrt{3}}{128} + \frac{15a^2\sqrt{3}}{256}$$

$$= \frac{53a^2\sqrt{3}}{16^2} = 53\sqrt{3}.$$



Следовательно, $a = 16$.

Ответ: 16